Devoir surveillé n° 2

Samedi 7 novembre

Durée : 4 heures
La calculatrice est interdite.
On attachera une grande importance à la qualité de la rédaction.

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. Calculer et simplifier $\sum_{k=0}^{n} \frac{5 \times 7^k}{3^{2k+1}}$.

Démonstration.
Remarquons tout d'abord que :

$$\frac{5 \times 7^k}{3^{2k+1}} = \frac{5 \times 7^k}{3 \times 3^{2k}} = \frac{5 \times 7^k}{3 \times (3^2)^k} = \frac{5}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^k$$

On a donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{5 \times 7^k}{3^{2k+1}} = \frac{5}{3}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{7}{9}\right)^k = \frac{5}{3}\,\frac{1-\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{7}{9}} = \frac{5}{3}\,\frac{1-\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}}{\frac{2}{9}} = \frac{5}{3}\,\frac{9}{2}\left(1-\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}\right)$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{5 \times 7^k}{3^{2k+1}} = \frac{15}{2}\left(1-\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}\right)}$$

□

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 5$, $u_1 = 7$ et la relation de récurrence, valable pour tout entier naturel n : $10u_{n+2} = 13u_{n+1} - 3u_n$.
Donner une formule explicite de u_n.

Démonstration.
La suite (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

- L'équation caractéristique associée à (u_n) est : $10x^2 = 13x - 3$. Notons $P(X) = 10X^2 - 13X + 3$. Le polynôme P admet $x_1 = 1$ pour racine évidente. Son autre racine x_2 est donnée par la relation : $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{10}$. On obtient ainsi : $x_2 = \frac{\frac{3}{10}}{x_1} = \frac{3}{10}$.

- Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \ = \ \lambda\ {x_1}^n + \mu\ {x_2}^n \ = \ \lambda\ 1^n + \mu \left(\dfrac{3}{10}\right)^n \ = \ \lambda + \mu \left(\dfrac{3}{10}\right)^n$
  où λ et μ sont deux réels donnés par :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl l} \lambda & + & \mu & = & 5 & (L_1) \\ \lambda & + & \dfrac{3}{10}\,\mu & = & 7 & (L_2) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl l} & & \dfrac{7}{10}\,\mu & = & -2 & (L_1)-(L_2) \\ \dfrac{7}{10}\,\lambda & + & & = & 7 - \dfrac{3}{10}\,5 & (L_2)-\frac{3}{10}(L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \mu & = & -\dfrac{20}{7} \\ \lambda & = & \dfrac{10}{7}\,\dfrac{11}{2} = \dfrac{55}{7} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \ = \ \dfrac{55}{7} - \dfrac{20}{7}\left(\dfrac{3}{10}\right)^n}$$

□

3. Donner la définition de « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand n tend vers $+\infty$ ».

Démonstration.

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \ \Rightarrow \ |u_n - \ell| < \varepsilon)}$$

Ou, avec l'abus de notation habituel :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon)}$$

□

4. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $v_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{1+3v_n}{4}$.
Donner une formule explicite de v_n.

Démonstration.
La suite (v_n) est arithmético-géométrique.

- L'équation de point fixe associée à la suite (v_n) est : $x = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{4}$.
  Elle admet pour unique solution : $\lambda = 1$.
- On écrit :

$$\begin{array}{rcrcrcrl} v_{n+1} & = & \dfrac{3}{4} & \times & v_n & + & \dfrac{1}{4} & (L_1) \\ \lambda & = & \dfrac{3}{4} & \times & \lambda & + & \dfrac{1}{4} & (L_2) \end{array}$$

et donc $$v_{n+1} - \lambda \ = \ \dfrac{3}{4} \ \times \ (v_n - \lambda) \qquad (L_1)-(L_2)$$

  Notons alors (w_n) la suite de terme général $w_n = v_n - \lambda$.
- La suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$.
  Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \times w_0 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \times (v_0 - \lambda) \ = \ \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \times (-1-1) = -2\ \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

$$\boxed{\text{On a donc, pour tout } n \in \mathbb{N} :\ v_n \ = \ w_n + \lambda \ = \ -2\ \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + 1.}$$

□

5. ***a.*** Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

1. **Initialisation** :

D'une part, on a : $\sum\limits_{k=1}^{0} \dfrac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{k\in[\![1,0]\!]} \dfrac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{k\in\varnothing} \dfrac{1}{k(k+1)} = 0$.

D'autre part : $\dfrac{0}{0+1} = 0$.

On a donc $\mathcal{P}(0)$.

2. **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(i.e.\ \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{n+1}{n+2}\right)$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} && \textit{par hypothèse de récurrence } (\mathcal{P}(n)) \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+1)}(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}$$

On a donc $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, on a démontré : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$. □

b. Trouver $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que : $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k}$.

Démonstration.
Remarquons tout d'abord que : $\dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k} = \dfrac{a \times k + b \times (k+1)}{k(k+1)} = \dfrac{(a+b)\ k + b}{k(k+1)}$.

L'égalité de l'énoncé se réécrit donc : $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{(a+b)\ k+b}{k(k+1)}$.

Par identification, cette égalité équivaut au système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b &=& 0 \\ b &=& 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -1 \\ b &=& 1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{En conclusion, } a=-1 \text{ et } b=1 \text{ et } \dfrac{1}{k(k+1)} = \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)}$$ □

c. En déduire une autre démonstration du résultat de la question ***a.***

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = \left(1 + \cancel{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}}\right) - \left(\cancel{\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right)} + \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

(on pouvait passer directement de la ligne 1 à 3 en justifiant d'une sommation télescopique)

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}}$$

□

6. Calculer et simplifier $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (i+1)j$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (i+1)j &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{j-1} (i+1)j\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(j \sum_{i=0}^{j-1} (i+1)\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(j \sum_{i=1}^{j} i\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} j \times \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (j^3 + j^2) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} j^3 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} j^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{4} \left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n+1}{3}\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{4} \left(\frac{3n(n+1) + 4n + 2}{6}\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{4} \left(\frac{3n^2 + 7n + 2}{6}\right) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (i+1)j = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}}$$

□

Exercice 2

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \ln(1 + w_n) \end{array}\right.$$

1. Justifier que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que w_n est positif quelque soit l'entier n.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: w_n est bien défini et $w_n \geqslant 0$.

1. **Initialisation** :
$w_0 = 1$ est bien défini et $w_0 = 1 \geqslant 0$.
On a donc $\mathcal{P}(0)$.

2. **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* w_{n+1} est bien défini et $w_{n+1} \geqslant 0$).
Par hypothèse de récurrence ($\mathcal{P}(n)$), w_n est bien défini et $w_n \geqslant 0$.
Ainsi, $1 + w_n \geqslant 1$. On en déduit que :
× $w_{n+1} = \ln(1 + w_n)$ est bien défini,
× $w_{n+1} = \ln(1 + w_n) \geqslant \ln(1) = 0$.
On a donc $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on a démontré : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n).}$$

□

2. Étudier les variations et le signe de la fonction f définie par $f(x) = \ln(1 + x) - x$.

Démonstration.

- La quantité $\ln(1 + x)$ est définie si $1 + x > 0$ *i.e.* si $x > -1$.
  On en déduit que $\mathscr{D}_f = \,]-1, +\infty[$.
- La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ et pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a :

$$f'(x) \ = \ \frac{1}{1+x} - 1 \ = \ -\frac{x}{x+1}$$

- Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $x + 1 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x$.
  On en déduit le tableau de variations de f.

x	-1		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
Variations de f	|| $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

- Ainsi, f admet un maximum égal à 0 au point d'abscisse $x = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(x) \leqslant 0.}$$

Remarque
La limite en $+\infty$ de f est donnée par le raisonnement suivant (*cf* chapitres à venir).

- Tout d'abord : $\ln(1+x) - x \ = \ -x \ \left(\dfrac{\ln(1+x)}{x} + 1 \right)$.
- Or : $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \ = \ \dfrac{\ln(x(1+\frac{1}{x}))}{x} \ = \ \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x}$.
  - × $\dfrac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées,
  - × $\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  et donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 0$.
- On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} -x \ \left(\dfrac{\ln(1+x)}{x} + 1 \right) = -\infty$

□

3. Déduire de la question précédente que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On a démontré en question ***1.*** que $w_n \geqslant 0$. Ainsi, $w_n \in \mathscr{D}_f$.
- $f(w_n) \ = \ \ln(1+w_n) - w_n \ = \ w_{n+1} - w_n \leqslant 0$ par la question précédente.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $w_{n+1} \leqslant w_n$.

$$\boxed{\text{La suite } (w_n) \text{ est donc décroissante.}}$$

□

4. Cette suite est-elle bornée ? Justifier.

Démonstration.

- D'après la question ***1.***, (w_n) est minorée par 0.
- La suite (w_n) étant décroissante, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ w_n \ \leqslant \ w_0 = 1$.
  Ainsi, (w_n) est majorée par 1.

$$\boxed{\text{La suite } (w_n) \text{ est donc bornée.}}$$

□

Exercice 3

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{x+1}{x-2}$$

1. Donner les domaines de définition de f et g.

Démonstration.

- La quantité $\dfrac{1}{x+1}$ est définie si : $x+1 \neq 0$ *i.e.* si $x \neq -1$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathscr{D}_f \ = \ \mathbb{R} \setminus \{-1\} \ = \,]-\infty, -1[\, \cup \,]-1, +\infty[.}$$

- La quantité $\dfrac{1}{x-2}$ est définie si : $x-2 \neq 0$ *i.e.* si $x \neq 2$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathscr{D}_g \ = \ \mathbb{R} \setminus \{2\} \ = \,]-\infty, 2[\, \cup \,]2, +\infty[.}$$

□

2. On note $a = \dfrac{-2\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}}$.

a. Déterminer $g\,(a)$.

Démonstration.
Commençons par calculer :

- $a+1 \ = \ \dfrac{-2\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}} + 1 \ = \ \dfrac{-2\sqrt{2} - \cancel{1} + \cancel{1} - \sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \ = \ \dfrac{-3\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$
- $a-2 \ = \ \dfrac{-2\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}} - 2 \ = \ \dfrac{\cancel{-2\sqrt{2}} - 1 - 2 + \cancel{2\sqrt{2}}}{1-\sqrt{2}} \ = \ \dfrac{-3}{1-\sqrt{2}}$

  Ainsi, on a : $\dfrac{1}{a-2} \ = \ \dfrac{1-\sqrt{2}}{-3}$.

On en déduit que : $\quad g(a) \ = \ -\dfrac{a+1}{a-2} \ = \ -(a+1)\ \dfrac{1}{a-2} \ = \ -\dfrac{\cancel{-3}\sqrt{2}}{\cancel{1-\sqrt{2}}} \ \dfrac{\cancel{1-\sqrt{2}}}{\cancel{-3}} \ = \ -\sqrt{2}$

$$\boxed{g(a) = -\sqrt{2}}$$

□

b. Que vaut $f(g\,(a))$? On donnera le résultat en fonction de a.

Démonstration.

$$\boxed{f(g(a)) \ = \ \frac{2g(a)-1}{g(a)+1} \ = \ \frac{-2\sqrt{2}-1}{-\sqrt{2}+1} \ = \ a}$$

□

c. Simplifier l'expression de a.

Démonstration.

$$a \ = \ \frac{-2\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}} \ = \ \frac{(-2\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} \ = \ \frac{-2\sqrt{2}-4-1-\sqrt{2}}{1-2} \ = \ \frac{-5-3\sqrt{2}}{-1}$$

$$\boxed{a = 5 + 3\sqrt{2}}$$

□

d. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Que vaut $f(g(x))$?
On simplifiera l'expression au maximum.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. On a : $f(g(x)) \;=\; \dfrac{2g(x)-1}{g(x)+1}$. On calcule alors :

- $2g(x) - 1 \;=\; -2\dfrac{x+1}{x-2} - 1 \;=\; \dfrac{-2x-2-(x-2)}{x-2} \;=\; \dfrac{-2x-\cancel{2}-x+\cancel{2}}{x-2} \;=\; \dfrac{-3x}{x-2}$
- $g(x) + 1 \;=\; -\dfrac{x+1}{x-2} + 1 \;=\; \dfrac{-x-1+(x-2)}{x-2} \;=\; \dfrac{-\cancel{x}-1+\cancel{x}-2}{x-2} \;=\; \dfrac{-3}{x-2}$

  Ainsi, on a : $\dfrac{1}{g(x)+1} \;=\; \dfrac{x-2}{-3}$.

On en déduit que : $$f(g(x)) \;=\; \frac{2g(x)-1}{g(x)+1} \;=\; (2g(x)-1)\,\frac{1}{g(x)+1} \;=\; \frac{-3x}{x-2}\,\frac{x-2}{-3} \;=\; x$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\},\ f(g(x)) = x}$$

□

3. Coder les fonctions f et g en **Scilab**.

Démonstration.

```
function y = f(x)
     y = (2*x-1) / (x+1)
endfunction
```

```
function y = g(x)
     y = -(x+1) / (x-2)
endfunction
```

□

4. Écrire un programme en **Scilab** qui :

× demande à l'utilisateur d'entrer une valeur au clavier et stocke le résultat dans une variable `u`,
× stocke dans une variable `calc` la valeur de f calculée au point `u`,
× stocke dans une variable `chaine` la phrase :
`"La valeur de h en` *u* `vaut` *calc*`"`, où *u* et *calc* doivent être remplacées par leur valeur,
× affiche la phrase précédente.

Démonstration.

```
u = input("Prière d''entrer un réel : ")
calc = f(u)
chaine = "La valeur de h en " + string(u) + " vaut " + string(calc)
disp(chaine)
```

□

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + n - 1 \end{array}\right.$

1. a. Montrer que $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$. Calculer u_3.

Démonstration.

- $u_1 \ = \ 2\ u_0 + 0 - 1 \ = \ 2 - 1 \ = \ 1$
- $u_2 \ = \ 2\ u_1 + 1 - 1 \ = \ 2$
- $u_3 \ = \ 2\ u_2 + 2 - 1 \ = \ 4 + 1 \ = \ 5$

$$\boxed{u_1 = 1,\ u_2 = 2 \text{ et } u_3 = 5}$$

□

b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 1$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n \geqslant 1$.

1. **Initialisation** :
$u_0 = 1 \geqslant 1$
On a donc $\mathcal{P}(0)$.

2. **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \geqslant 1$).
Par définition, on a : $u_{n+1} \ = \ 2u_n + n - 1$.
Or, par hypothèse de récurrence : $u_n \geqslant 1$. Donc : $2u_n + n - 1 \geqslant 2 + n - 1 = n + 1$.
Comme $n \geqslant 0$, on a $n + 1 \geqslant 1$ et donc $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on a démontré : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n).}$$

□

c. En déduire sans récurrence que pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n \geqslant n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $n - 1 \in \mathbb{N}$. Par définition de la suite (u_n), on a :

$$u_{(n-1)+1} \ = \ 2u_{n-1} + (n-1) - 1 \ = \ 2u_{n-1} + n - 2 \geqslant \ 2 + n - 2 \ = \ n$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } u_n \geqslant n.}$$

□

d. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{array}{rclcll} u_{n+1} - u_n & = & 2u_n + n - 1 - u_n & = & u_n + n - 1 & \\ & & & \geqslant & 1 + n - 1 \ = \ n & \textit{d'après la question } \textbf{\textit{1.b.}} \end{array}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc croissante.}}$$

□

2. Dans cette question, on pose pour tout entier naturel n : $v_n = n + u_n$.

a. Exprimer v_{n+1} en fonction de n et u_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, on a :

$$v_{n+1} \;=\; (n+1) + u_{n+1} \;=\; n + \cancel{1} + 2u_n + n - \cancel{1} \;=\; 2u_n + 2n$$

$$\boxed{v_{n+1} \;=\; 2u_n + 2n}$$

☐

b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et donner une formule explicite de v_n, en fonction de n uniquement.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a : $v_{n+1} \;=\; 2u_n + 2n \;=\; 2\ (u_n + n) \;=\; 2\ v_n$.

Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison 2.

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } v_n \;=\; 2^n\ v_0 \;=\; 2^n\ (u_0 + 0) \;=\; 2^n}$$

☐

c. Montrer enfin que pour tout entier naturel n, on a $u_n = 2^n - n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, $v_n \;=\; u_n + n$.

$$\boxed{\text{Par la question précédente, on en déduit que : } u_n \;=\; v_n - n \;=\; 2^n - n}$$

☐

3. **a.** Démontrer qu'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{u_{n+1} - 1}{2^n} = \dfrac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \dfrac{n}{2^n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de la suite (u_n), on a :

$$\frac{u_{n+1} - 1}{2^n} \;=\; \frac{(2u_n + n - 1) - 1}{2^n} \;=\; \frac{2(u_n - 1)}{2^n} + \frac{n}{2^n} \;=\; \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1} - 1}{2^n} \;=\; \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}}$$

☐

b. En déduire par récurrence que pour tout n entier strictement positif on a :

$$\frac{u_n - 1}{2^{n-1}} \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $\dfrac{u_n - 1}{2^{n-1}} \;=\; \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}$.

1. **Initialisation** :

- D'une part, $\dfrac{u_1 - 1}{2^{1-1}} \;=\; \dfrac{1-1}{2^0} \;=\; \dfrac{0}{1} \;=\; 0.$
- D'autre part, $\displaystyle\sum_{k=0}^{1-1} \frac{k}{2^k} \;=\; \sum_{k=0}^{0} \frac{k}{2^k} \;=\; \frac{0}{2^0} \;=\; 0$

On a donc $\mathcal{P}(1)$.

2. **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(\textit{i.e.} \ \dfrac{u_{n+1}-1}{2^{(n+1)-1}} = \sum\limits_{k=0}^{(n+1)-1} \dfrac{k}{2^k} \right)$.

D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}-1}{2^n} &= \frac{u_n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} \right) + \frac{n}{2^n} \qquad \textit{par hypothèse de récurrence } (\mathcal{P}(n)) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on a démontré : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathcal{P}(n).}$$

□

c. Montrer finalement sans récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{k}{2^k} = 2 - \dfrac{n+1}{2^{n-1}}$

Démonstration.
On pouvait procéder de deux manières.

- *Partir de la **3.a.***
  Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$. D'après la question ***3.a.***, on a : $\dfrac{k}{2^k} = \dfrac{u_{k+1}-1}{2^k} - \dfrac{u_k-1}{2^{k-1}}$.
  En sommant de part et d'autre de l'égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{u_{k+1}-1}{2^k} - \frac{u_k-1}{2^{k-1}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}-1}{2^k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k-1}{2^{k-1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k-1}{2^{k-1}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k-1}{2^{k-1}} \\ &= \left(\left(\cancel{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k-1}{2^{k-1}}} \right) + \frac{u_n-1}{2^{n-1}} \right) - \left(\frac{u_0-1}{2^{-1}} + \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k-1}{2^{k-1}}} \right) \\ &= \frac{u_n-1}{2^{n-1}} - \frac{u_0-1}{2^{-1}} = \frac{2^n-n-1}{2^{n-1}} - 2(u_0-1) \\ &= \frac{2^n}{2^{n-1}} - \frac{n+1}{2^{n-1}} - 2(\cancel{1}-\cancel{1}) = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

  (on pouvait passer directement de la ligne 1 à 5 en justifiant d'une sommation télescopique)

- *Se servir du travail de la **3.b.***
  D'après la question ***3.b.*** : $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{k}{2^k} = \dfrac{u_n-1}{2^{n-1}} = \dfrac{2^n-n-1}{2^{n-1}} = \dfrac{2^n}{2^{n-1}} - \dfrac{n+1}{2^{n-1}} = 2 - \dfrac{n+1}{2^{n-1}}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}}$$

□

Exercice 5

On étudie les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{ll} a_0 = 0, & b_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 2a_n + b_n, & \forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = 2b_n \end{array}\right.$$

1. À quel type de suite remarquable appartient $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
En déduire une expression de b_n en fonction de n.

Démonstration.
La suite (b_n) est géométrique de raison 2.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \ = \ 2^n\ b_0 \ = \ 2^n.}$$

□

2. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$, pour tout entier naturel n.

a. Justifier que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ et préciser son premier terme.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de la suite (a_n), on a :

$$c_{n+1} \ = \ \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} \ = \ \frac{2a_n + b_n}{2^{n+1}} \ = \ \frac{2}{2^{n+1}}\ a_n + \frac{2^n}{2^{n+1}} \ = \ \frac{1}{2^n}\ a_n + \frac{1}{2} \ = \ c_n + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{La suite } (c_n) \text{ est arithmétique de raison } \frac{1}{2} \text{ et de premier terme } c_0 \ = \ \frac{a_0}{2^0} \ = \ \frac{0}{1} \ = \ 0}$$

□

b. En déduire une expression de c_n en fonction de n.

Démonstration.

$$\boxed{\text{On déduit de la question précédente que pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } c_n = \frac{n}{2}.}$$

□

c. Déduire des questions précédentes qu'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = n\ 2^{n-1}$.

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{D'après les questions précédentes, on a, pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ a_n \ = \ 2^n\ c_n \ = \ \dfrac{2^n\ n}{2} \ = \ \dfrac{2^n}{2}\ n \ = \ 2^{n-1}\ n \end{array}}$$

□

3. **Application au calcul d'une somme**

a. Justifier que les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient : $\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \ = \ a_{k+1} - a_k - 2^k$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} a_{k+1} - a_k - 2^k \ = \ 2^k(k+1) - 2^{k-1}k - 2^k & = & 2^k\ k + \cancel{2^k} - 2^{k-1}k - \cancel{2^k} \\ & = & 2^{k-1}\ k\ (2-1) \ = \ 2^{k-1}\ k \ = \ a_k \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in \mathbb{N},\ a_k \ = \ a_{k+1} - a_k - 2^k.}$$

□

b. Montrer qu'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) \ = \ a_{n+1}$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On reconnaît une sommation télescopique. Plus précisément, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) \ = \ a_{n+1} - a_0 \ = \ a_{n+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) \ = \ a_{n+1}}$$

□

c. Pour tout entier naturel n, calculer $\sum_{k=0}^{n} 2^k$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \ = \ \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \ = \ -(1 - 2^{n+1}) \ = \ 2^{n+1} - 1$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} 2^k \ = \ 2^{n+1} - 1}$$

□

d. Déduire des questions précédentes qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k 2^{k-1} \ = \ (n-1)\ 2^n + 1$$

Démonstration.
Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après la question ***3.a.***, on a : $a_k \ = \ a_{k+1} - a_k - 2^k$.
En sommant de part et d'autre de l'égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k \ &= \ \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) - \sum_{k=0}^{n} 2^k \\
&= \ a_{n+1} - (2^{n+1} - 1) \ = \ 2^n\ (n+1) - 2^{n+1} + 1 \\
&= \ 2^n\ (n+1) - 2 \times 2^n + 1 \ = \ 2^n\ (n+1-2) + 1 \\
&= \ (n-1)\ 2^n + 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k 2^{k-1} \ = \ (n-1)\ 2^n + 1}$$

□