Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 3

Lundi 14 décembre

Exercice 1

Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soient X, Y et Z trois ensembles. Montrer que $X \cup Y = X \cap Z \ \Leftrightarrow\ Y \subset X \subset Z$.

Démonstration.
($\Rightarrow$) Supposons $X \cup Y = X \cap Z$.

- On a : $Y \subset X \cup Y = X \cap Z$.
- De plus : $X \cap Z \subset X$.

Par transitivité, on en déduit que : $Y \subset X$.
On raisonne de même pour démontrer que $X \subset Z$.

- On a : $X \subset X \cup Y = X \cap Z$.
- De plus : $X \cap Z \subset Z$.

Et ainsi : $X \subset Z$.

$$\boxed{\text{On a démontré : } X \cup Y = X \cap Z \ \Rightarrow\ Y \subset X \subset Z.}$$

($\Leftarrow$) Supposons $Y \subset X \subset Z$ et démontrons que $X \cup Y = X \cap Z$.
($\subset$) • Comme $Y \subset X$, on a : $Y \cup X \subset X \cup X = X$.
• Or par hypothèse : $X \subset Z$.
On en déduit que $Y \cup X \subset X$ et $Y \cup X \subset Z$ et ainsi : $Y \cup X \subset X \cap Z$.
($\supset$) On a toujours (*sans hypothèse*) : $X \cap Z \subset X \subset X \cup Y$.

$$\boxed{\text{On a démontré : } X \cup Y = X \cap Z \ \Leftarrow\ Y \subset X \subset Z.}$$

□

2. Soit $u : A \to B$ et $v : B \to C$ deux applications. On suppose que $v \circ u$ est surjective.
Montrer que v est surjective.

Démonstration.
Supposons $v \circ u : A \to C$ surjective et démontrons que $v : B \to C$ est surjective.
Soit $y \in C$.
Comme $v \circ u : A \to C$ est surjective, il existe $a \in A$ tel que $y = v \circ u(a) = v(u(a))$.
Notons $x = u(a)$. Comme $u(a) \in B$, on a démontré qu'il existe $x \in B$ tel que $y = v(x)$.

$$\boxed{\text{Ainsi } v \text{ est surjective.}}$$

□

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application strictement décroissante.
Montrer que f est injective.

Démonstration.
Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_1 \neq x_2$.
Quitte à renommer ces éléments, on peut supposer que $x_1 < x_2$.
Comme f est strictement décroissante, on en déduit : $f(x_1) > f(x_2)$. Et ainsi : $f(x_1) \neq f(x_2)$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est injective.}}$$

□

4. On note $A = \{\{1,2\}, 3, \varnothing\}$.
Détailler $\mathcal{P}(A)$. Quel est son cardinal ?
Combien y a-t-il d'applications de $\{1,2,3,4\}$ dans A ?

Démonstration.
Pour plus de lisibilité, notons $a_1 = \{1,2\}$, $a_2 = 3$, $a_3 = \varnothing$, de sorte que : $A = \{a_1, a_2, a_3\}$.

- Détaillons $\mathcal{P}(A)$.

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{P}(A) & = & \{ & \varnothing, \\ & & & \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \\ & & & \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}, \\ & & & \{a_1, a_2, a_3\} \qquad \} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \mathrm{Card}(\mathcal{P}(A)) = 8 \ (= 2^3).}$$

Enfin, en remplaçant les a_i par leur valeurs, on obtient :

$$\boxed{\begin{array}{rcll} \mathcal{P}(A) & = & \{ & \varnothing, \\ & & & \{\{1,2\}\}, \{3\}, \{\varnothing\}, \\ & & & \{\{1,2\}, 3\}, \{\{1,2\}, \varnothing\}, \{3, \varnothing\}, \\ & & & \{\{1,2\}, 3, \varnothing\} \qquad \} \end{array}}$$

- Notons $\mathcal{A}([\![1,4]\!], A)$ l'ensemble des applications de $[\![1,4]\!]$ dans A et considérons une application $f : \{1,2,3,4\} \to A$. Elle est complètement déterminée par le 4-uplet $(f(1), f(2), f(3), f(4))$ d'éléments de A. En d'autres termes, l'application :

$$\begin{array}{rcccccccc} \mathcal{A}([\![1,4]\!], A) & \to & A & \times & A & \times & A & \times & A \\ f & \mapsto & (f(1) & , & f(2) & , & f(3) & , & f(4)) \end{array}$$

est bijective. On en déduit que l'ensemble $\mathcal{A}([\![1,4]\!], A)$ est fini et que :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{A}([\![1,4]\!], A)) = \mathrm{Card}(A \times A \times A \times A) = \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(A)$$

$$\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{A}([\![1,4]\!], A)) = 3^4 = 81}$$

□

.

5. On note $E = [\![0;12]\!]$ et on considère l'application $f : E \to E$ donnée par le tableau de valeurs suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	12	2	9	3	8	0	4	10	7	11	6	1	5

a. L'application f est-elle injective ? surjective ? (Justifier).
Si elle est bijective, donner sa bijection réciproque f^{-1}.

Démonstration.

- On remarque que tout couple $(x_1, x_2) \in [\![0,12]\!]^2$ d'éléments distincts ($x_1 \neq x_2$) admet des images distinctes : $f(x_1) \neq f(x_2)$.

$$\boxed{f \text{ est donc injective.}}$$

- On a : $\mathrm{Im}(f) = [\![0,12]\!]$ ce qui correspond à l'ensemble d'arrivée de f.

$$\boxed{f \text{ est donc surjective.}}$$

- L'application f est donc bijective.
Sa réciproque est fournie par le tableau de valeurs suivant :

x	12	2	9	3	8	0	4	10	7	11	6	1	5
$f^{-1}(x)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Ou encore, en ordonnant les valeurs de départ :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f^{-1}(x)$	5	11	1	3	6	12	10	8	4	2	7	9	0

□

b. Si x est un élément de E, on appelle *orbite de* x et on note $\mathrm{Orb}(x)$ la partie de E contenant x, $f(x)$, $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$ ...
Si l'on considère $x = 0$, on a : $f(0) = 12$, $f(f(0)) = f(12) = 5$, $f(f(f(0))) = f(5) = 0$.
On en déduit que l'orbite de 0 est $\{0, 5, 12\}$.
Déterminer $\mathrm{Orb}(1)$.

Démonstration.
D'après le tableau de valeurs, on a :

× $f(1) = 2$,

× $f(f(1)) = f(2) = 9$,

× $f(f(f(1))) = f(9) = 11$,

× $f(f(f(f(1)))) = f(11) = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathrm{Orb}(1) \ = \ \{1, 2, 9, 11\}.}$$

□

c. Donner quatre éléments a, b, c et d de E tels que tout élément x de E soit dans l'orbite de a, b, c ou d.

Démonstration.
En procédant de même, on obtient : $\mathrm{Orb}(3) = \{3\}$ et $\mathrm{Orb}(4) = \{4, 8, 7, 10, 6\}$. Ainsi :

$$\mathrm{Orb}(0) \cup \mathrm{Orb}(1) \cup \mathrm{Orb}(3) \cup \mathrm{Orb}(4) \ = \ [\![0,12]\!]$$

$$\boxed{\text{Tout élément } x \in E \text{ est dans l'orbite de } 0,\ 1,\ 3 \text{ ou } 4.}$$

□

d. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^n = f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f$ (le symbole f apparaît n fois).
Si $x \in \text{Orb}(0)$, que vaut $f^3(x)$?
Si $x \in \text{Orb}(1)$, que vaut $f^4(x)$?

Démonstration.

- On rappelle que : $\text{Orb}(0) = \{0, 5, 12\}$. Étudions tous les cas possibles :
  × si $x = 0$, $f^3(0) = f(f(f(0))) = f(f(12)) = f(5) = 0$,
  × si $x = 5$, $f^3(5) = f(f(f(5))) = f(f(0)) = f(12) = 5$,
  × si $x = 12$, $f^3(12) = f(f(f(12))) = f(f(5)) = f(0) = 12$,

$$\boxed{\text{Si } x \in \text{Orb}(0), \text{ on a : } f^3(x) = x.}$$

- En procédant de même, on obtient la propriété suivante :

$$\boxed{\text{Si } x \in \text{Orb}(1), \text{ on a : } f^4(x) = x.}$$

- Cette propriété se généralise comme suit.
  Considérons $u \in [\![0, 12]\!]$ et notons $m = \text{Card}(\text{Orb}(u))$. On a alors :

$$\forall x \in \text{Orb}(u), \ f^m(x) \ = \ x$$

□

e. Montrer que $f^{60} = \text{id}_E$.

Démonstration.
Soit $x \in E$. D'après la question ***c.***, x est dans l'orbite de 0, 1, 3 ou 4.

- Supposons $x \in \text{Orb}(0)$. D'après la question ***d.***, on a : $f^3|_{\text{Orb}(0)} = \text{id}_{\text{Orb}(0)}$. Ainsi :

$$f^{60}(x) \ = \ (f^3)^{20}(x) \ = \ (\text{id}^3_{\text{Orb}(0)})^{20}(x) = \text{id}^{20}_{\text{Orb}(0)}(x) \ = \ \text{id}_{\text{Orb}(0)}(x) \ = \ x$$

- Supposons $x \in \text{Orb}(1)$. D'après la question ***d.***, on a : $f^4|_{\text{Orb}(1)} = \text{id}_{\text{Orb}(1)}$. Ainsi :

$$f^{60}(x) \ = \ (f^4)^{15}(x) \ = \ (\text{id}^4_{\text{Orb}(1)})^{15}(x) = \text{id}^{15}_{\text{Orb}(0)}(x) \ = \ \text{id}_{\text{Orb}(0)}(x) \ = \ x$$

- On procède de même dans les deux autres cas en remarquant que :
  × $f^1|_{\text{Orb}(3)} = \text{id}_{\text{Orb}(3)}$ et $f^{60} = (f^1)^{60}$,
  × $f^5|_{\text{Orb}(4)} = \text{id}_{\text{Orb}(4)}$ et $f^{60} = (f^5)^{12}$.

On en déduit que : $\forall x \in E, \ f^{60}(x) \ = \ x$.

$$\boxed{\text{Autrement dit, on a : } f^{60} \ = \ \text{id}_E.}$$

□

Exercice 2

On considère les trois suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et $(w_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la nature de ces trois suites.

1. **Étude de $(u_n)_{n\geqslant 1}$**

a. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \dfrac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \geqslant 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- $\sqrt{k} \leqslant \sqrt{k+1}$ donc $2\ \sqrt{k} \leqslant \sqrt{k} + \sqrt{k+1}$ et par passage à l'inverse :
$$\frac{1}{2\ \sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$
On obtient la première inégalité en multipliant de part et d'autre par 2.
- $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})} = \dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\cancel{k}+1)-\cancel{k}} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$
Cette égalité démontre la deuxième inégalité.

$$\boxed{\text{On a démontré : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \geqslant 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)}$$

□

b. Démontrer à l'aide du résultat précédent que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \ \geqslant\ 2\sqrt{n+1}-2$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \ \geqslant\ 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$.
En sommant de part et d'autre de cette inégalité, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \ \geqslant\ \sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \ =\ 2 \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \ =\ 2\ (\sqrt{n+1}-\sqrt{1})$$

(*la dernière égalité résulte d'une sommation télescopique*)

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \ \geqslant\ 2\sqrt{n+1}-2}$$

□

c. Quelle est la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$?

Démonstration.

- D'après le théorème de composition, $\sqrt{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- Ainsi, par le théorème de comparaison (*cas des limites infinies*), on obtient que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n \ =\ +\infty}$$

□

2. **Étude de** $(v_n)_{n\geqslant 1}$

a. Étudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $v_{n+1} - v_n \;=\; \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k^2} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} \;=\; \dfrac{1}{(n+1)^2} \;\geqslant\; 0.$

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est donc croissante.}}$$

□

b. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $v_n \leqslant 1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^2-k}$.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 2$. Comme $k^2 \;\geqslant\; k^2 - k$, on en déduit, par passage à l'inverse, que : $\dfrac{1}{k^2} \;\leqslant\; \dfrac{1}{k^2-k}$.

En sommant de part et d'autre de cette inégalité, on obtient : $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^2} \;\leqslant\; \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^2-k}$

Ainsi : $v_n \;=\; 1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^2} \;\leqslant\; 1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^2-k}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \geqslant 2, \text{ on a : } v_n \;\geqslant\; 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k}.}$$

□

c. Calculer explicitement la somme $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^2-k}$.

Indication : on pourra commencer par chercher deux nombres réels a et b tels qu'on ait, pour tout $k \geqslant 2$, l'égalité $\dfrac{1}{k^2-k} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k-1}$.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 2$. Remarquons tout d'abord que : $\dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k-1} \;=\; \dfrac{a \times (k-1) + b \times k}{(k-1)\ k} \;=\; \dfrac{(a+b)\ k - a}{(k-1)\ k}$.

L'égalité de l'énoncé se réécrit donc : $\dfrac{1}{(k-1)\ k} \;=\; \dfrac{(a+b)\ k - a}{(k-1)\ k}$.

Par identification, cette égalité équivaut au système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b &=& 0 \\ -a &=& 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -1 \\ b &=& 1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{En conclusion, } a = -1 \text{ et } b = 1 \text{ et } \frac{1}{(k-1)\ k} = -\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right)}$$

On en déduit que (*par sommation télescopique*) :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)\ k} \;=\; \sum_{k=2}^{n} -\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right) \;=\; -\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right) \;=\; -\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2-1}\right) \;=\; 1 - \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)\ k} \;=\; 1 - \frac{1}{n}}$$

□

d. Déduire des questions précédentes que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée par 2 puis qu'elle converge.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les questions précédentes, on a :

$$v_n \;=\; 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k} \;=\; 1 + 1 - \frac{1}{n} \;=\; 2 - \frac{1}{n} \;\leqslant\; 2$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (v_n) \text{ est majorée par } 2}$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est croissante majorée donc convergente.}}$$

□

3. **Étude de** $(w_n)_{n\geqslant 1}$

a. Étudier la monotonie de la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $w_{n+1} - w_n \;=\; \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \;=\; \frac{1}{(n+1)^3} \;\geqslant\; 0.$

$$\boxed{\text{La suite } (w_n) \text{ est donc croissante.}}$$

□

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n \leqslant v_n$.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 1$. On a alors : $k \times k^2 \geqslant 1 \times k^2$. Par passage à l'inverse, on en déduit que : $\dfrac{1}{k^3} \;\leqslant\; \dfrac{1}{k^2}$.
Enfin, en sommant de part et d'autre de l'inégalité, on obtient :

$$w_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \;\leqslant\; \frac{1}{k^2} \;=\; v_n$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n \;\leqslant\; v_n}$$

□

c. La suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ?

Démonstration.
La suite (v_n) étant majorée par 2, la suite (w_n) l'est aussi (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n \leqslant v_n \leqslant 2$).

$$\boxed{\text{La suite } (w_n) \text{ est croissante majorée donc convergente.}}$$

□

d. Écrire une fonction `premiersElmtsW` en **Scilab** qui :

- × prend en paramètre un entier `m`,
- × stocke dans une variable `aux` les `m` premiers éléments de la suite (w_n),
- × calcule les `m` premières valeurs de la suite (w_n) (*i.e.* `[`w_1`,` w_2`, ...,` $w_{\mathtt{m}}$`]`).

Démonstration.

```
function tab = premiersElmtsW (m)
    aux = 1 ./ (1:m) ^3
    tab = cumsum(aux)
endfunction
```

□

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n + n + 1$.

1. ***a.*** Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > n$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n > n$.

1. **Initialisation** :
$u_0 = 1 > 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

2. **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} > n+1$).
Par définition de la suite (u_n), on a : $u_{n+1} = 2u_n + (n+1)$.
Or, par hypothèse de récurrence, $u_n > n$.
Donc $2u_n > 2n$.
Ainsi : $2u_n + (n+1) > 2n + (n+1) = 3n+1$.
Enfin, comme $3n+1 \geqslant n+1$ (ceci équivaut à $n \geqslant 0$), on en déduit :

$$u_{n+1} = 2u_n + n + 1 > 3n+1 \geqslant n+1 \quad \text{et donc} \quad u_{n+1} > n+1$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vérifiée.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on a donc : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n).}$$

□

b. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration.
Comme $u_n > n$ et que $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, le théorème de comparaison permet d'affirmer que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

□

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_n + n$.

a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & u_{n+1} + (n+1) \\ & = & 2u_n + n + 1 + (n+1) \\ & = & 2(u_n + n) + 2 \\ & = & 2v_n + 2 \end{array}$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est donc arithmético-géométrique.}}$$

□

b. Exprimer v_n en fonction de n.

Démonstration.
On effectue l'étude de (v_n), suite arithmético-géométrique.

- L'équation de point fixe associée à la suite (v_n) est : $x = 2x + 2$.
  Elle admet pour unique solution : $\lambda = -2$.
- D'autre part :

$$\begin{array}{rclcccccl} v_{n+1} & = & 2 & v_n & + & 2 & & & (L_1) \\ \lambda & = & 2 & \lambda & + & 2 & & & (L_2) \end{array}$$

$$\text{et donc} \quad v_{n+1} - \lambda = 2 \ (v_n - \lambda) \qquad (L_1) - (L_2)$$

  Notons alors (w_n) la suite de terme général $w_n = v_n - \lambda$.
- La suite (w_n) est une suite géométrique de raison 2.
  On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 2^n \ w_0 = 2^n \ (v_0 + 2) = 3 \times 2^n$.

$$\boxed{\text{Et ainsi : } \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = w_n - 2 = 3 \times 2^n - 2.}$$

□

c. En déduire alors que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^n - n - 2$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{On déduit de la question précédente que : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n - n = 3 \times 2^n - 2 - n.}$$

□

3. Écrire la fonction $f : x \mapsto 3 \times 2^x - x - 2$ en **Scilab**.

Démonstration.

```
function y = f (x)
    y = 3*2^x-x-2
endfunction
```

□

4. On note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. Calculer la somme S_n en fonction de n.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= 3 \sum_{k=0}^{n} 2^k - \sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} 2 \\ &= 3 \ \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} - \frac{n(n+1)}{2} - 2(n+1) \\ &= 3 \ (2^{n+1} - 1) - \frac{1}{2} \ (n(n+1) + 4(n+1)) \\ &= 3 \times 2^{n+1} - \frac{1}{2} \ (n^2 + 5n) - 5 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = 3 \times 2^{n+1} - \frac{1}{2} \ (n^2 + 5n) - 5}$$

□

5. Écrire un programme **Scilab** qui demande à l'utilisateur un entier n, et qui affiche S_n.

Démonstration.

```
n = input('Veuillez entrer un entier n : ')
S = 3*2^(n+1) - (n^2+5*n)/2 -5
disp(S)
```

□

Problème A

On considère les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) \; = \; \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9} \quad \text{et} \quad g(x) \; = \; x^3 - 3x + 1$$

On définit de plus la suite (x_n) par : $\begin{cases} x_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \; x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$

1. Étude de la fonction g

a. Étudier les variations de la fonction g.

Démonstration.

- La fonction g est une fonction polynomiale. Elle est donc définie sur $\mathbb{R}$.
- Pour la même raison, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g'(x) \; = \; 3x^2 - 3 \; = \; 3\,(x^2 - 1) \; = \; 3\,(x-1)(x+1)$$

- On en déduit le tableau de variations de g.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

□

b. Écrire la fonction g en **Scilab**.

Démonstration.

```
function y = g (x)
    y = x^3-3*x+1
endfunction
```

□

c. Notons $\tilde{g} :]0, \frac{1}{2}[\to \mathbb{R}$ l'application définie par : $\forall x \in]0, \frac{1}{2}[, \ \tilde{g}(x) = g(x)$.
L'application $\tilde{g}$ est-elle injective ?

Démonstration.
D'après l'étude précédente, la fonction $\tilde{g}$ est strictement décroissante.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \tilde{g} \text{ est injective.}}$$

□

d. Démontrer que $\tilde{g}$ réalise une bijection de $]0, \frac{1}{2}[$ sur un ensemble A à préciser.

Démonstration.
L'application $\tilde{g}$ est injective. Elle réalise donc une bijection de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ sur $A = \operatorname{Im} \tilde{g}$.
Or, comme $\tilde{g}$ est strictement décroissante (*et continue !*), on a :

$$\operatorname{Im} \tilde{g} \ = \ \tilde{g}\left(\left]0, \frac{1}{2}\right[\right) \ = \ \left]\tilde{g}\left(\frac{1}{2}\right), \tilde{g}(0)\right[\ = \ \left]g\left(\frac{1}{2}\right), g(0)\right[\ = \ \left]-\frac{3}{8}, 1\right[$$

$$\boxed{\text{L'application } \tilde{g} \text{ réalise une bijection de } \left]0, \tfrac{1}{2}\right[\text{ sur } \left]-\tfrac{3}{8}, 1\right[.}$$

□

e. En déduire que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une unique solution $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

Démonstration.
D'après la question précédente, tout élément $y \in \left]-\frac{3}{8}, 1\right[$ admet un unique antécédent dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ par l'application g. En particulier, $0 \in \left]-\frac{3}{8}, 1\right[$ admet un unique antécédent $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

$$\boxed{\text{Autrement dit, l'équation } x^3 - 3x + 1 = 0 \text{ possède une unique solution } \alpha \in \left]0, \tfrac{1}{2}\right[}$$

□

2. Étude de la fonction f

a. Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$.
En déduire que α est l'unique solution de $f(x) = x$ dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} f(x) \ = \ x & \Leftrightarrow & \dfrac{x^3}{9} + \dfrac{2x}{3} + \dfrac{1}{9} \ = \ x \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{x^3}{9} - \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{9} \ = \ 0 \\ & \Leftrightarrow & 9\left(\dfrac{x^3}{9} - \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{9}\right) \ = \ 9 \times 0 \\ & \Leftrightarrow & x^3 - 3x + 1 \ = \ 0 \end{array}$$

$$\boxed{f(x) \ = \ x \ \Leftrightarrow \ x^3 - 3x + 1 \ = \ 0}$$

D'après la question précédente, α est l'unique solution de $f(x) = x$ dans l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Comme } g(0) = 1 \neq 0 \text{ et } g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} \neq 0, \ \alpha \text{ est l'unique solution de} \\ f(x) = x \text{ dans l'intervalle } \left[0, \frac{1}{2}\right].\end{array}}$$

□

b. Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ et déterminer son signe sur $\mathbb{R}^+$.

Démonstration.
La fonction f étant polynomiale, elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) \; = \; \frac{3}{9}x^2 + \frac{2}{3} \; = \; \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3} \; = \; \frac{1}{3} \, \left(x^2 + 2\right) > 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est (strictement) croissante sur } \mathbb{R}.}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant f(0) = \tfrac{1}{9} > 0.}$$

□

3. **Étude de la suite** (x_n)

a. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} \geqslant x_n$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : x_{n+1} \geqslant x_n$.

1. **Initialisation** :
$x_1 = f(x_0) = f(0) = \dfrac{1}{9} \geqslant 0 = x_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

2. **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $x_{n+2} \geqslant x_{n+1}$).
Par hypothèse de récurrence, on a : $x_{n+1} \geqslant x_n$.
Comme f est croissante, on en déduit : $x_{n+2} = f(x_{n+1}) \geqslant f(x_n) = x_{n+1}$.
Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on a donc : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n).}$$

□

b. Montrer que $f\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$ et en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{2}$.

Démonstration.

- On a : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \; = \; \dfrac{1}{9} \, \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{2}{3} \, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{9} \; = \; \dfrac{1}{3} \, \left(\dfrac{1}{24} + 1 + \dfrac{1}{3}\right) \; = \; \dfrac{1}{3} \, \dfrac{33}{24} \; = \; \dfrac{11}{24} \; < \; \dfrac{11}{22} \; = \; \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{f\left(\tfrac{1}{2}\right) < \tfrac{1}{2}}$$

- Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : 0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{2}$.

  1. **Initialisation** :
  $x_0 = 0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

  2. **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $0 \leqslant x_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$).
  Par hypothèse de récurrence, on a : $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{2}$.
  Par application de f, croissante, on a :

$$\begin{array}{ccccc} f(0) & \leqslant & f(x_n) & \leqslant & f\left(\frac{1}{2}\right) \\ \rotatebox{90}{$\leqslant$} & & \| & & \rotatebox{90}{$<$} \\ 0 & \leqslant & x_{n+1} & \leqslant & \frac{1}{2} \end{array}$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on a donc : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n).}$$

□

c. Montrer que la suite (x_n) converge vers α.

Démonstration.

- D'après la question ***3.a.***, la suite est croissante.
  D'après la question ***3.b.***, la suite (x_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

  $\boxed{\text{On en déduit que } (x_n) \text{ est convergente vers une limite } \ell.}$

- D'après la question précédente, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{2}$.
  Ainsi, par passage à la limite, on en déduit que : $0 \leqslant \ell \leqslant \frac{1}{2}$.
- Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, on a $x_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

  Or : $x_{n+1} \ = \ \dfrac{x_n^3}{9} + \dfrac{2\ x_n}{3} + \dfrac{1}{9} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell^3}{9} + \dfrac{2\ \ell}{3} + \dfrac{1}{9}$

  On en déduit que : $\ell \ = \ \dfrac{\ell^3}{9} + \dfrac{2\ \ell}{3} + \dfrac{1}{9}$.
- Ainsi, $\ell \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et est solution de l'équation $f(x) = x$.

$\boxed{\text{D'après la question } \textbf{\textit{2.a.}}\text{, on en déduit que la limite de } (x_n) \text{ est } \alpha.}$

□

Problème B

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par son premier terme u_1 strictement positif, et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n}$$

Pour tout réel strictement positif a, on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_a(x) = x - \sqrt{x} - a$$

1. Pour $a > 0$ fixé, montrer que l'équation $f_a(x) = 0$ (d'inconnue x) possède une unique solution réelle notée $\ell(a)$, dont on donnera l'expression en fonction de a.

Démonstration.

0) Notons (E) l'équation $f_a(x) = 0$. Cette équation est définie pour tout $x \in \mathscr{D}_{(E)} = \mathbb{R}^+$.

1) Soient $a > 0$ et $x \geqslant 0$. On a :

$$\begin{array}{rcl} (E) \quad f_a(x) = 0 & \Leftrightarrow & x - \sqrt{x} - a = 0 \\ & \Leftrightarrow & \sqrt{x} = x - a \\ & \Rightarrow & (\sqrt{x})^2 = (x-a)^2 \\ & \Leftrightarrow & x = x^2 - 2ax + a^2 \\ & \Leftrightarrow & x^2 - (1+2a)x + a^2 = 0 \quad (E') \end{array}$$

(du fait de l'élévation au carré, on travaille seulement par implication : $(E) \Rightarrow (E')$)

2) Considérons $P(X) = X^2 - (1+2a)X + a^2$. Le discriminant de ce polynôme est :

$$\Delta = (1+2a)^2 - 4a^2 = 1 + 4a + \cancel{4a^2} - \cancel{4a^2} = 1 + 4a > 0$$

Le polynôme P admet donc pour racines :

$$x_1 = \frac{(1+2a) + \sqrt{1+4a}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{(1+2a) - \sqrt{1+4a}}{2}$$

L'équation (E') admet donc deux solutions : x_1 et x_2.

3) Testons alors les solutions de (E') sur l'équation (E), équivalente à : $x - a = \sqrt{x}$.

× $x_2 - a = \dfrac{(1+2a) - \sqrt{1+4a}}{2} - \dfrac{2a}{2} = \dfrac{1 - \sqrt{1+4a}}{2} < 0.$

En effet, $\sqrt{1+4a} > 1$ car $a > 0$.

Ainsi, $0 > x_2 - a \neq \sqrt{x_2} \geqslant 0$ et x_2 n'est pas solution de (E).

× $x_1 - a = \dfrac{(1+2a) + \sqrt{1+4a}}{2} - \dfrac{2a}{2} = \dfrac{1 + \sqrt{1+4a}}{2} > 0$

On en déduit que : $\sqrt{x_1} = x_1 - a \ \Leftrightarrow\ (\sqrt{x_1})^2 = (x_1 - a)^2$.
Le réel x_1 est donc bien solution de (E).

$$\boxed{\text{L'équation } (E) \text{ admet pour unique solution } \ell(a) = \frac{(1+2a)+\sqrt{1+4a}}{2}.}$$

$\square$

2. Étudier les variations de f_a.

Démonstration.

- La fonction f_a est définie pour tout $x \geqslant 0$. Ainsi : $\mathscr{D}_{f_a} = \mathbb{R}^+$.
- La fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, pour tout $x > 0$, on a :

$$f_a'(x) \ = \ 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ = \ \frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$$

Comme $2\sqrt{x} > 0$, la quantité $f_a'(x)$ est du signe de $2\sqrt{x}-1$. Or :

$$2\sqrt{x}-1 \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ \sqrt{x} \geqslant \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow \ x \geqslant \frac{1}{4}$$

On en déduit le tableau de variations de f_a.

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
Signe de $f_a'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f_a	$-a$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}-a$	$\nearrow$	$+\infty$

$\square$

3. Écrire une fonction **Scilab** nommée `f` qui prend en paramètre deux réels `a` et `x` et renvoie $f_a(x)$.

Démonstration.

```
function y = f (a, x)
    y = x-sqrt(x)-a
endfunction
```

$\square$

4. Démontrer que la fonction $\ell : a \mapsto \ell(a)$ est croissante.

Démonstration.
La fonction ℓ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (*on ne considère que des réels $a > 0$ dans l'exercice*).
Pour $a > 0$, on a :

$$\ell'(a) \ = \ 1 + \frac{4}{2 \times 2\sqrt{1+4a}} \ = \ 1 + \frac{1}{\sqrt{1+4a}} > 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } \ell \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{+*}.}$$

$\square$

5. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a $u_n > 1$. Lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, déterminer sa limite.

Démonstration.

- Démontrons par récurrence que : $\forall n \geqslant 2,\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n > 1$.

  1. **Initialisation** :
  $u_2 = \sqrt{u_1} + \dfrac{1}{1} = \sqrt{u_1} + 1 > 1$.
  Ainsi $\mathcal{P}(2)$ est vérifiée.

  2. **Hérédité** : soit $n \geqslant 2$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} > 1$).
  Par hypothèse de récurrence, on a : $u_n > 1$.
  On en déduit que : $\sqrt{u_n} > \sqrt{1} = 1$ par stricte croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$.
  Ainsi : $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n} > 1 + \dfrac{1}{n} > 1$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

  $$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on a donc : } \forall n \geqslant 2,\ \mathcal{P}(n).}$$

- Si l'on suppose que (u_n) converge vers une limite $b \in \mathbb{R}$, alors :
  × $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$,
  × $\sqrt{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{b}$ par théorème de composition.

  Par passage à la limite, on en déduit que :

$$\begin{array}{ccc} u_n & > & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ b & \geqslant & 1 \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccccc} u_{n+1} & = & \sqrt{u_n} & + & \dfrac{1}{n} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ b & = & \sqrt{b} & + & 0 \end{array}$$

  Or, comme $b \geqslant 0$, on a : $b = \sqrt{b} \ \Leftrightarrow\ b^2 = b \ \Leftrightarrow\ b(b-1) = 0 \ \Leftrightarrow\ b = 0$ ou $b = 1$.

  $$\boxed{\text{Comme } b \geqslant 1, \text{ si la suite } (u_n) \text{ est convergente, elle converge vers } b = 1.}$$

□

6. On suppose ici que la suite (u_n) vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ suivante :

$$(\mathcal{P}) : \text{pour tout entier } n \geqslant 1, \text{ on a } u_n \leqslant \ell\left(\frac{1}{n}\right)$$

a. Que vaut $\ell(1)$? En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

Démonstration.

$$\boxed{\ell(1) = \frac{1+2+\sqrt{1+4}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

On a démontré en question ***4.*** que la fonction ℓ est croissante.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{1}{n} \leqslant 1$. On en déduit que : $\ell\left(\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \ell(1)$.
Ainsi, si (u_n) vérifie la propriété $(\mathcal{P})$, on a : $\forall n \geqslant 1,\ u_n \leqslant \ell\left(\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \ell(1) = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

$$\boxed{\text{Si la suite } (u_n) \text{ vérifie la propriété } (\mathcal{P}), \text{ elle est majorée par } \frac{3+\sqrt{5}}{2}.}$$

□

b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$u_{n+1} - u_n \;=\; \sqrt{u_n} + \frac{1}{n} - u_n \;=\; -\left(u_n - \sqrt{u_n} - \frac{1}{n}\right) \;=\; -f_{\frac{1}{n}}(u_n)$$

Comme $f_{\frac{1}{n}}$ est croissante et que l'on suppose que $u_n \leqslant \ell\left(\frac{1}{n}\right)$, on a :

$$f_{\frac{1}{n}}(u_n) \;\leqslant\; f_{\frac{1}{n}}\left(\ell\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 0$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc croissante.}}$$

□

c. Démontrer par l'absurde que la propriété $(\mathcal{P})$ est fausse.

Démonstration.
- Si la suite (u_n) vérifie $(\mathcal{P})$ alors elle est :
  - × croissante d'après la question ***6.b***,
  - × et majorée d'après la question ***6.a***.

  On en déduit que (u_n) est convergente. D'après la question ***5.***, sa limite est $b = 1$.
- Or, comme (u_n) est croissante, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant u_1$.
  Par passage à la limite, on en déduit que : $b \geqslant u_1 > 1$, ce qui contredit $b = 1$.

$$\boxed{\text{Ceci démontre, par l'absurde, que la propriété } (\mathcal{P}) \text{ est fausse.}}$$

□

7. **Conclusion**

a. D'après la question précédente, quelle propriété la suite (u_n) vérifie-t-elle ?

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après la question précédente, la suite } (u_n) \text{ vérifie la propriété : } \exists n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > \ell\left(\frac{1}{n}\right).}$$

□

b. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante à partir d'un certain rang m.

Démonstration.
D'après la question précédente, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que : $u_m > \ell\left(\frac{1}{m}\right)$.

Démontrons par récurrence que : $\forall n \geqslant m,\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_{n+1} \leqslant u_n$.

1. **Initialisation** :

$u_{m+1} - u_m = -\left(u_m - \sqrt{u_m} - \frac{1}{m}\right) = -f_{\frac{1}{m}}(u_m)$.

Comme $f_{\frac{1}{m}}$ est croissante et que $u_m > \ell\left(\frac{1}{m}\right)$, on a :

$$f_{\frac{1}{m}}(u_m) \;\geqslant\; f_{\frac{1}{m}}\left(\ell\left(\frac{1}{m}\right)\right) = 0$$

Ainsi : $u_{m+1} - u_m \leqslant 0$ et $\mathcal{P}(m)$ est vérifiée.

2. **Hérédité** : soit $n \geqslant m$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$).
Par hypothèse de récurrence, on a : $u_{n+1} \leqslant u_n$.
On en déduit que : $\sqrt{u_{n+1}} \leqslant \sqrt{u_n}$ par croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$.
Ainsi : $u_{n+2} \ = \ \sqrt{u_{n+1}} + \dfrac{1}{n+1} \leqslant \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n+1} \leqslant \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n} \ = \ u_{n+1}$.
$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vérifiée.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on a donc : } \forall n \geqslant m,\ \mathcal{P}(n).}$$

□

c. En déduire que (u_n) converge.

Démonstration.
La suite (u_n) est :

× décroissante (à partir d'un certain rang) d'après la question ***7.b***,

× et minorée par 1 d'après la question ***5***.

Ainsi, (u_n) est convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit, d'après la question } \textbf{5.}\text{, que } (u_n) \text{ converge vers } b = 1.}$$

□