Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 5

Samedi 13 février

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D}_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$.
On se propose de construire la courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}$.

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est bien $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Démonstration.
La quantité $\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ est bien définie si $e^{2x}-1 \neq 0$. Or on a :

$$e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie sur } \mathscr{D}_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[}$$

□

2. **Étude sur** $]0, +\infty[$

a. Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que $f'(x) = \dfrac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$ et déterminer son signe.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ car c'est le quotient de :
  - × la fonction $x \mapsto e^{2x}+1$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathscr{D}_f$,
  - × la fonction $x \mapsto e^{2x}-1$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathscr{D}_f$, et qui ne s'annule pas sur $\mathscr{D}_f$.
- Soit $x \in \mathscr{D}_f$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2e^{2x}\ (e^{2x}-1) - (e^{2x}+1)\ 2e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{2e^{2x}((e^{2x}-1)-(e^{2x}+1))}{(e^{2x}-1)^2} \\ &= \frac{2e^{2x}(\cancel{e^{2x}} - 1 - \cancel{e^{2x}} - 1)}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{2e^{2x}(-2)}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} \end{aligned}$$

- Comme $(e^{2x}-1)^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-4e^{2x}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f'(x) < 0.}$$

□

b. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f(x) = 1 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^{2x} - 1}$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$f(x) \;=\; \frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^{2x}-1} \;=\; \frac{(\mathrm{e}^{2x}-1)+2}{\mathrm{e}^{2x}-1} \;=\; \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}-1} + \frac{2}{\mathrm{e}^{2x}-1} \;=\; 1 + \frac{2}{\mathrm{e}^{2x}-1}$$

(on peut aussi partir de $1 + \frac{2}{e^{2x}-1}$ *et, après manipulations, faire apparaître* $\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = f(x)$*)*

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = 1 + \frac{2}{\mathrm{e}^{2x}-1}.}$$

$\square$

c. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Démonstration.
Tout d'abord : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{2x} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{2x} - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}-1} = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi } \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}-1} = 1.}$$

$\square$

d. Déterminer la limite de f en 0^+.

Démonstration.
Si $x > 0$, on a $\mathrm{e}^{2x} > 1$ et donc $\mathrm{e}^{2x} - 1 > 0$.
Ainsi $\lim\limits_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{2x} - 1 = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}-1} = +\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi } \lim_{x \to +0^+} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}-1} = +\infty.}$$

$\square$

e. En utilisant les résultats précédents, dresser le tableau de variations de f sur $]0, +\infty[$.
Déterminer le signe de f sur $]0, +\infty[$.

Démonstration.

x	0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	
Variations de f	‖	$+\infty$ ↘	1
Signe de $f(x)$	‖	$+$	

D'après l'étude précédente, pour tout $x \in\,]0, +\infty[$, on a : $f(x) > 1$.
(1 est la borne inférieure - non atteinte - de f sur $]0, +\infty[$)

$$\boxed{\forall x \in\,]0, +\infty[,\ f(x) > 0 \text{ pour tout } x \in\,]0, +\infty[.}$$

$\square$

3. Construction de la courbe $\mathcal{C}$.

a. Montrer que pour tout x non nul on a $f(-x) = -f(x)$.
En déduire une propriété de symétrie de $\mathcal{C}$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$f(-x) = \frac{e^{-2x}+1}{e^{-2x}-1} = \frac{\frac{1}{e^{2x}}+1}{\frac{1}{e^{2x}}-1} = \frac{\frac{1+e^{2x}}{e^{2x}}}{\frac{1-e^{2x}}{e^{2x}}} = \frac{1+e^{2x}}{\cancel{e^{2x}}} \times \frac{\cancel{e^{2x}}}{1-e^{2x}}$$

$$= \frac{1+e^{2x}}{1-e^{2x}} = \frac{1+e^{2x}}{-(e^{2x}-1)} = -\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = -f(x)$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}^*,\ f(-x) = -f(x). \text{ Ainsi, la fonction } f \text{ est impaire et sa courbe représentative } \mathcal{C} \text{ est symétrique par rapport à l'origine.}}$$

□

b. Calculer $f(\ln 3)$ et $f'(\ln 3)$ (on donnera leur valeur exacte).

Démonstration.

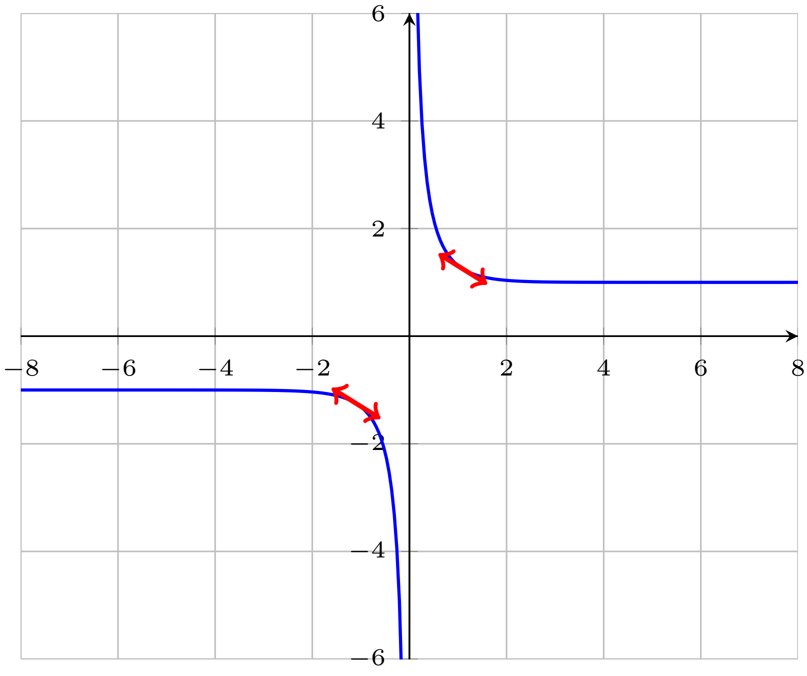
- $f(\ln(3)) = \dfrac{e^{2\ln(3)}+1}{e^{2\ln(3)}-1} = \dfrac{e^{\ln(3^2)}+1}{e^{\ln(3^2)}-1} = \dfrac{9+1}{9-1} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$
- $f'(\ln(3)) = \dfrac{-4\ e^{2\ln(3)}}{(e^{2\ln(3)}-1)^2} = \dfrac{-4\ e^{\ln(3^2)}}{(e^{\ln(3^2)}-1)^2} = \dfrac{-4\times 9}{(9-1)^2} = -\dfrac{4\times 9}{8\times 8} = -\dfrac{9}{2\times 8} = -\dfrac{9}{16}$

$$\boxed{f(\ln(3)) = \frac{5}{4} \text{ et } f'(\ln(3)) = -\frac{9}{16}}$$

□

c. Construire $\mathcal{C}$ avec tous ses éléments remarquables.
On donne les valeurs approchées :
$\ln 3 \approx 1,1 \qquad 5/4 \approx 1,2 \qquad 9/16 \approx 0,6 \qquad 9/32 \approx 0,3$

Démonstration.



□

Exercice 2

1. Résoudre le système suivant, d'inconnues x, y et z :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 3x & + & 5y & - & z & = & 9 \\ 4x & - & 2y & + & 45z & = & 10 \end{array}\right.$$

Démonstration.
Nommons (S) le système de l'énoncé.

$$(S) \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4\,L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ & - & y & - & 4z & = & 0 \\ & - & 10y & + & 41z & = & -2 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2 \leftarrow -L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & 4z & = & 0 \\ & - & 10y & + & 41z & = & -2 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + 10\,L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & 4z & = & 0 \\ & & & + & 81z & = & -2 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2 \leftarrow -L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & 4z & = & 0 \\ & - & 10y & + & 41z & = & -2 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + 10\,L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & 4z & = & 0 \\ & & & + & 81z & = & -2 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3/81}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & 4z & = & 0 \\ & & & & z & = & -\dfrac{2}{81} \end{array}\right.$$

$$\overset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4\,L_3}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & & & = & \dfrac{245}{81} \\ & & y & & & = & \dfrac{8}{81} \\ & & & & z & = & -\dfrac{2}{81} \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & & & = & \dfrac{229}{81} \\ & & y & & & = & \dfrac{8}{81} \\ & & & & z & = & -\dfrac{2}{81} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Le système admet donc pour unique solution le triplet } \left(\frac{229}{81}, \frac{8}{81}, -\frac{2}{81}\right)}$$

□

2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{e^x + 1} - \sqrt{e^x}}{\ln(x)}$.

Démonstration.

$$\sqrt{e^x + 1} - \sqrt{e^x} = \frac{(\sqrt{e^x + 1} - \sqrt{e^x})(\sqrt{e^x + 1} + \sqrt{e^x})}{\sqrt{e^x + 1} + \sqrt{e^x}} = \frac{(\cancel{e^x} + 1) - (\cancel{e^x})}{\sqrt{e^x + 1} + \sqrt{e^x}} = \frac{1}{\sqrt{e^x + 1} + \sqrt{e^x}}$$

Or $\sqrt{e^x + 1} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\sqrt{e^x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit que $\sqrt{e^x + 1} - \sqrt{e^x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{Comme } \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty, \text{ on en déduit que } \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{e^x + 1} - \sqrt{e^x}}{\ln(x)} = 0}$$

□

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$.

Démonstration.

- Tout d'abord, on a : $\displaystyle\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right)\right)$
- Or : $\displaystyle\frac{x+1}{x-3} = \frac{(x-3)+4}{x-3} = 1+\frac{4}{x-3}$
- On écrit alors : $\displaystyle x\times\ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right) = x\times\ln\left(1+\frac{4}{x-3}\right) = x\times\frac{\ln\left(1+\frac{4}{x-3}\right)}{\frac{4}{x-3}}\times\frac{4}{x-3}$

  Comme $\frac{4}{x-3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a : $\displaystyle\frac{\ln\left(1+\frac{4}{x-3}\right)}{\frac{4}{x-3}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

  D'autre part : $\displaystyle\frac{4x}{x-3} = \frac{4x}{x}\,\frac{1}{1-\frac{3}{x}} = 4\,\frac{1}{1-\frac{3}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 4$

$$\boxed{\text{On en déduit que } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x = \mathrm{e}^4}$$

□

Exercice 3

On dispose d'une pièce dont la probabilité de faire « face » est $\dfrac{1}{3}$ et de quatre urnes numérotés de 0 à 3. Pour $k\in\{0,1,2,3\}$, l'urne n° k contient k boules vertes et $(3-k)$ boules rouges.

On considère l'expérience $(\mathcal{E})$ suivante : on lance trois fois la pièce, puis on pioche une unique boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de fois où « face » a été obtenu. Par exemple, si on a obtenu deux « face » au cours de ces trois lancers, on pioche une boule dans l'urne n° 2.

On note, pour tout $k\in\{0,1,2,3\}$, F_k l'événement « on a obtenu k fois « face » au cours des trois lancers ». V est l'événement « la boule tirée est verte ».

1. Justifier que, pour tout $k\in\{0,1,2,3\}$, la probabilité de l'événement F_k est égale à :

$$\mathbb{P}(F_k) = \binom{3}{k}\frac{2^{3-k}}{27}$$

Donner les valeurs de ces probabilités sous forme de fractions irréductibles.
On vérifiera en particulier que $\mathbb{P}(F_2) = \dfrac{2}{9}$.

Démonstration.

- Soit $k\in\{0,1,2,3\}$. Un tirage contenant k « face » est entièrement déterminé par :
  - × les numéros des lancers qui ont eu pour résultat « face » : $\binom{3}{k}$ possibilités

  D'autre part, chacun de ces tirages à la probabilité $\displaystyle\left(\frac{1}{3}\right)^k\times\left(\frac{2}{3}\right)^{3-k} = \frac{2^{3-k}}{3^3}$ de se produire.

$$\boxed{\text{La probabilité qu'un tel tirage se produise est donc } \mathbb{P}(F_k) = \binom{3}{k}\frac{2^{3-k}}{3^3}.}$$

- Si $k = 0$, $\mathbb{P}(F_0) = \binom{3}{0} \frac{2^3}{3^3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$
- Si $k = 1$, $\mathbb{P}(F_1) = \binom{3}{1} \frac{2^2}{3^3} = 3\ \frac{2^2}{3^3} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$
- Si $k = 2$, $\mathbb{P}(F_2) = \binom{3}{2} \frac{2^1}{3^3} = \binom{3}{1} \frac{2^3}{3^3} = 3\ \frac{2}{3^3} = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}$
- Si $k = 0$, $\mathbb{P}(F_3) = \binom{3}{3} \frac{2^0}{3^3} = \frac{1}{27}$

$$\boxed{\mathbb{P}(F_0) = \frac{8}{27},\ \ \mathbb{P}(F_1) = \frac{4}{9},\ \ \mathbb{P}(F_2) = \frac{2}{9} \text{ et } \mathbb{P}(F_3) = \frac{1}{27}.}$$

$\square$

2. Donner, pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, la probabilité conditionnelle $P_{F_k}(V)$.

Démonstration.
Connaissant l'urne dans laquelle on tire, la probabilité de tirer une boule verte n'est autre que la proportion de boules vertes dans l'urne.

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \{0, 1, 2, 3\}, \text{ on a : } \mathbb{P}_{F_k}(V) = \frac{k}{3}.}$$

$\square$

3. Montrer que $P(V) = \frac{1}{3}$.

Démonstration.

- La famille (F_0, F_1, F_2, F_3) est un système complet d'événements (on pioche forcéement dans l'une des urnes).
- On en déduit, par la formule des probabilités totales que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V) &= \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}(F_k) \times \mathbb{P}_{F_k}(V) = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \frac{2^{3-k}}{3^3} \times \frac{k}{3} = \frac{2^3}{3^4} \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \frac{k}{2^k} \\
&= \frac{2^3}{3^4} \left(1\ \frac{0}{2^0} + 3\ \frac{1}{2} + 3\ \frac{2}{2^2} + 1\ \frac{3}{2^3} \right) = \frac{2^3}{3^4}\ \frac{1}{2^3}\ \left(3\ 2^2 + 3\ 2^2 + 3\right) \\
&= \frac{\cancel{2^3}}{3^4}\ \frac{27}{\cancel{2^3}} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien } \mathbb{P}(V) = \frac{1}{3}.}$$

$\square$

4. Calculer $P_V(F_2)$.

Démonstration.
D'après la formule de Bayes, on a : $\mathbb{P}_V(F_2) = \dfrac{\mathbb{P}(F_2)\ \mathbb{P}_{F_2}(V)}{\mathbb{P}(V)} = \dfrac{\frac{2}{9}\ \frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{9}\ \frac{2}{\cancel{3}}\ \cancel{3} = \frac{4}{9}$

$$\boxed{\mathbb{P}_V(F_2) = \frac{4}{9}}$$

$\square$

5. Les événements F_1 et V sont-ils indépendants ? Justifier.

Démonstration.
On a $\mathbb{P}_{F_1}(V) = \frac{1}{3} = \mathbb{P}(V)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } F_1 \text{ et } V \text{ sont indépendants.}}$$

$\square$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x\ln(x) - 1$ si $x > 0$ et $f(0) = -1$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ car elle est la somme des fonctions :
  - × $x \mapsto x\ln(x)$ continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme produit des fonctions :
    - ***(i)*** $x \mapsto x$ polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^{+*}$,
    - ***(ii)*** $x \mapsto \ln(x)$ continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
  - × $x \mapsto -1$ constante donc continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- D'autre part, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \;=\; \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) - 1 \;=\; 0 - 1 \;=\; -1 \;=\; f(0)$.
  On en déduit que f est continue en 0.

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+.}$$

□

2. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Comme } \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty, \text{ on a } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

□

3. Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $f'(x)$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car elle est la somme des fonctions :
  - × $x \mapsto x\ln(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme produit des fonctions :
    - ***(i)*** $x \mapsto x$ polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$,
    - ***(ii)*** $x \mapsto \ln(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
  - × $x \mapsto -1$ constante donc dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^{+*}.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. On a alors : $f'(x) \;=\; \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} \;=\; \ln(x) + 1$.

$$\boxed{\forall x > 0,\ f'(x) \;=\; \ln(x) + 1}$$

□

4. Établir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

Démonstration.
Soit $x > 0$. On a :

$$f'(x) > 0 \ \Leftrightarrow \ \ln(x) + 1 > 0 \ \Leftrightarrow \ \ln(x) > -1 \ \Leftrightarrow \ x > \mathrm{e}^{-1}$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	-1	↘	$-1-\mathrm{e}^{-1}$	↗	$+\infty$

Avec $f(\mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e}^{-1} \ln(\mathrm{e}^{-1}) - 1 = -\mathrm{e}^{-1} - 1$ □

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}^+$.
On note u_n cette solution. Justifier que $u_n > 1$.

Démonstration.

- La fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est :
  1) continue sur $[\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$,
  2) strictement croissante sur $[\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.
  Elle réalise donc une bijection de $[\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$ sur $f([\mathrm{e}^{-1}, +\infty[)$ avec :

$$f([\mathrm{e}^{-1}, +\infty[) = f([\mathrm{e}^{-1}, +\infty[) = [f(\mathrm{e}^{-1}), \lim_{x \to +\infty} f(x)[= [-1 - \mathrm{e}^{-1}, +\infty[$$

- Comme $n \geqslant 0$, on a $n \in [-1 - \mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Ainsi, l'équation } f(x) = n \text{ possède une unique solution dans } [\mathrm{e}^{-1}, +\infty[.}$$

- Enfin, $f(1) = 1 \times \ln(1) - 1 = -1$ donc $f(u_n) = n > -1 = f(1)$.
  On applique alors, de part et d'autre de cette inégalité, la fonction f^{-1} strictement croissante.

$$\boxed{\text{On obtient ainsi : } u_n > 1.}$$

□

6. On note g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.

a. Justifier que g est une bijection de $[1, +\infty[$ dans un intervalle J à préciser.

Démonstration.

- La fonction $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ est injective car restriction de f qui est elle-même injective.
- D'autre part, $g : [1, +\infty[\to J$ est surjective si l'on choisit $J = \mathrm{Im}(g) = g([1, +\infty[)$. Or :

$$g([1, +\infty[) \ = \ [f(1), \lim_{x \to +\infty} f(x)[\ = \ [-1, +\infty[$$

$$\boxed{g \text{ réalise une bijection de } [1, +\infty[\text{ sur } [-1, +\infty[.}$$

□

b. Donner le tableau de variation complet de la réciproque g^{-1} sur J.

Démonstration.
La fonction g^{-1} est de même monotonie que g.
Comme $[1, +\infty[\subset [\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$, on en déduit le tableau de variations suivant.

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Variations de g^{-1}	$1 \nearrow +\infty$

$\square$

c. Exprimez u_n à l'aide de g^{-1}.
En déduire la monotonie de la suite (u_n) et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Par définition, on a : $f(u_n) = n$.
  De plus, comme $u_n > 1$, on a $f(u_n) = g(u_n)$.
  $\boxed{\text{On en déduit que } g(u_n) = n \text{ et donc que } u_n = g^{-1}(n).}$
- Comme g^{-1} est strictement croissante et $n < n+1$, on obtient :
  $$u_n = g^{-1}(n) < g^{-1}(n+1) = u_{n+1}$$
  $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc (strictement) croissante.}}$
- Pour ce dernier point, on pouvait raisonner de deux manières différentes.

  La manière adaptée à l'énoncé, à privilégier ici
  $$\lim_{n\to+\infty} u_n \;=\; \lim_{n\to+\infty} g^{-1}(n) \;=\; \lim_{x\to+\infty} g^{-1}(x) \;=\; +\infty$$

  Ou alors à l'aide du théorème de convergence monotone (peu adapté à l'énoncé)

  Rappelons que, par définition de la suite (u_n), on a $f(u_n) = n$.
  Comme $u_n > 1 > 0$, cela s'écrit :
  $$u_n \ln(u_n) - 1 \;=\; n \quad \text{ou encore} \quad u_n \ln(u_n) \;=\; n+1$$
  Deux cas se présentent alors.

  1) Soit (u_n) est majorée
  Étant croissante, elle est convergente vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$.
  En passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtient alors : $\ell\ \ln(\ell) = +\infty$.
  Ceci étant impossible, ce cas est à écarter.

  2) Soit (u_n) n'est pas majorée
  Étant croissante, elle tend vers $+\infty$.

  $\boxed{\text{On en déduit que } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$

$\square$

Problème A

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x associe $x^2 e^x - 1$.

Étude d'une fonction

1. Dresser le tableau de variations de φ, en précisant la limite de φ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.

Démonstration.

- La fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est la somme de :
  - $\times$ $x \mapsto x^2 e^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ car produit des fonctions :
    - ***(i)*** $x \mapsto x^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale,
    - ***(ii)*** $x \mapsto e^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
  - $\times$ $x \mapsto -1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ car constante.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\varphi'(x) \;=\; 2x\ e^x + x^2\ e^x \;=\; e^x\ (2x + x^2) \;=\; e^x\ (2+x)\ x$$

Comme $e^x > 0$, $\varphi'(x)$ est du signe de $x\ (2x+1)$. On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$		$+$		$-$		$+$	
Variations de φ	-1	$\nearrow$	$4e^{-2} - 1$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Détaillons les limites obtenues.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2\ e^x \;=\; 0$ par croissances comparées donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) \;=\; -1$,

  (on peut détailler avec le changement de variable $X = -x$: $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2\ e^x \;=\; \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X^2}{e^X} \;=\; 0$)
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2\ e^x \;=\; +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) \;=\; +\infty$.

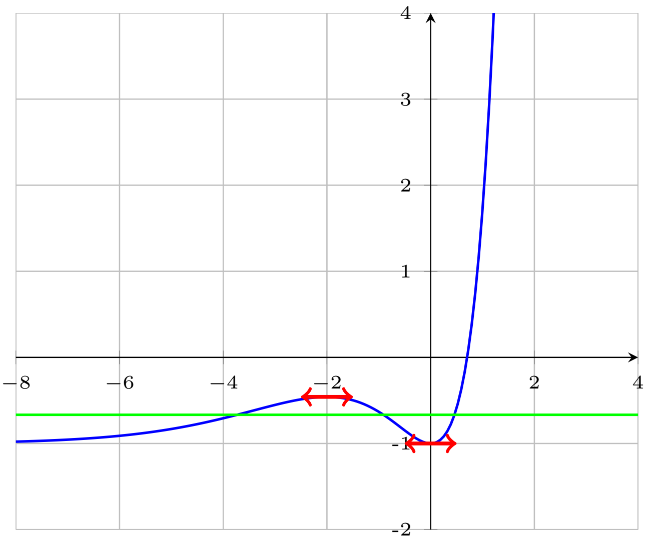
Notons enfin que : $-\dfrac{5}{9} < \varphi(-2) < 0$. En effet :

$$\begin{array}{llllll} & 2 & < & e & < & 3 \\ \text{donc} & \dfrac{1}{2} & > & \dfrac{1}{e} & > & \dfrac{1}{3} \\ \text{et} & \dfrac{1}{4} & > & \left(\dfrac{1}{e}\right)^2 & > & \dfrac{1}{9} \end{array} \qquad \begin{array}{llllll} \text{ainsi} & 1 & > & 4\left(\dfrac{1}{e}\right)^2 & > & \dfrac{4}{9} \\ \text{enfin} & 0 & > & 4\left(\dfrac{1}{e}\right)^2 - 1 & > & -\dfrac{5}{9} \end{array}$$

□

2. Tracer la courbe représentative de φ.

Démonstration.



□

3. ***a.*** Déterminer le nombre d'antécédents de 5 par φ.

b. Déterminer le nombre d'antécédents de $-\dfrac{2}{3}$ par φ.

Démonstration.

a. • La fonction φ est :

1) continue sur $[0, +\infty[$,

2) strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $\varphi([0, +\infty[) = [\varphi(0), \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)[= [-1, +\infty[$.

• Comme $5 \in [-1, +\infty[$, 5 possède un unique antécédent dans $[0, +\infty[$ par φ.

• Enfin, $\varphi(x) \leqslant \varphi(-2) \leqslant 0 < 5$ pour tout $x \in]-\infty, 0[$.
Ainsi, 5 n'admet pas d'antécédent dans $]-\infty, 0[$.

$$\boxed{\text{5 possède un unique antécédent par la fonction } \varphi.}$$

b. On raisonne de même pour chercher les antécédents de $-\dfrac{2}{3}$.

• φ réalise une bijection de $]-\infty, -2]$ sur $\varphi(]-\infty, -2]) =]\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x), \varphi(-2)] =]-1, \varphi(-2)]$.

Comme $-1 < -\dfrac{2}{3} < -\dfrac{5}{9} < \varphi(-2)$, $-\dfrac{2}{3}$ possède un unique antécédent dans $]-\infty, -2[$ par φ.

• φ réalise une bijection de $]-2, 0[$ sur $\varphi(]-2, 0[) =]\varphi(0), \varphi(-2)[=]-1, \varphi(-2)[$.

Comme $-1 < -\dfrac{2}{3} < \varphi(-2)$, $-\dfrac{2}{3}$ possède un unique antécédent dans $]-2, 0[$ par φ.

• φ réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $\varphi([0, +\infty[) = [\varphi(0), \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)[= [-1, +\infty[$.

Comme $-1 < -\dfrac{2}{3}$, $-\dfrac{2}{3}$ possède un unique antécédent dans $[0, +\infty[$ par φ.

$$\boxed{-\frac{2}{3} \text{ possède 3 antécédents par la fonction } \varphi.}$$

□

4. Établir que l'équation $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in \,]0,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que α appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$.

Démonstration.

- Soit $x \in \,]0,+\infty[$. On remarque que : $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x^2} \;\Leftrightarrow\; x^2\,\mathrm{e}^x = 1 \;\Leftrightarrow\; x^2\,\mathrm{e}^x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi(x) = 0$.
- D'après la question ***3.a.***, la fonction φ réalise une bijection de $]0,+\infty[$ dans $]-1,+\infty[$.
- Comme $0 \in]-1,+\infty[$, l'équation $\varphi(x) = 0$ possède une unique solution dans $]0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{L'équation } \mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x^2}\text{, d'inconnue } x \in \,]0,+\infty[\text{, admet une solution et une seule, notée } \alpha.}$$

- Enfin $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1 < 0$. En effet :

$$\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1 < 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} < 1 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} < 4 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e} < 16$$

  La dernière équivalence est obtenue car la fonction élévation au carré est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Comme $\mathrm{e} < 2,72$, on en conclut que $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) < 0 = \varphi(\alpha)$.
- Enfin, en appliquant φ^{-1}, strictement croissante, de part et d'autre de cette inégalité, on obtient :

$$\boxed{\alpha > \frac{1}{2}}$$

□

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x associe $x^3\mathrm{e}^x$, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\; u_{n+1} = f(u_n)$.

Étude d'une suite

5. Montrer que $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration.

- On commence par faire l'étude de la fonction $f : x \mapsto x^3\,\mathrm{e}^x$.
  Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $f'(x) = 3x^2\,\mathrm{e}^x + x^3\,\mathrm{e}^x = x^2\,(3+x)\,\mathrm{e}^x$.
  Pour $x \neq 0$, $x^2\,\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $3+x$.
  On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
Variations de f	0	$\searrow$	$27\mathrm{e}^{-3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

  On note que la fonction f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

- Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n \geqslant 1$.

  1) **Initialisation** :
  $u_1 = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.

  2) **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \geqslant 1$).

  Par définition de la suite (u_n), on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.
  Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant 1$.
  La fonction f étant croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit que $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant f(1) = \mathrm{e} \geqslant 1$.

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

  Par principe de récurrence, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$. □

6. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_{n+1} \geqslant u_n$.

1) **Initialisation** :
$u_2 = f(u_1) = f(1) = \mathrm{e} \geqslant 1 = u_1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.

2) **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$).

Par hypothèse de récurrence, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
On rappelle de plus que $u_{n+1} \geqslant 1 \geqslant 0$ par la question précédent.
La fonction f étant croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit que $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n) = u_{n+1}$.

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Par principe de récurrence, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$. □

7. Quelle est la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$?

Démonstration.
D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante. Deux cas se présentent alors.

1) Soit (u_n) est majorée
La suite (u_n) est alors convergente vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

- En passant à la limite dans cette égalité, on obtient alors : $\ell = f(\ell)$ *i.e.* $\ell = \ell^3\ \mathrm{e}^{\ell}$.
  - × $\ell = 0$ est solution de cette équation.
  - × Si $\ell \neq 0$ cette équation équivaut à $\ell^2\ \mathrm{e}^{\ell} = 0$ qui a pour seule solution $\ell = 0$.

  On en conclut que $\ell = 0$ est la seule solution de cette équation.
- Or, d'après la question précédente, $u_n \geqslant 1$.
  Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\ell \geqslant 1$.

Ceci étant impossible, ce cas est à écarter.

2) Soit (u_n) n'est pas majorée
Étant croissante, elle tend vers $+\infty$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. □

Informatique

8. Coder la fonction $f : x \mapsto x^3\ e^x$ en **Scilab**.

Démonstration.

```
function y = f(x)
    y = x^3 * exp(x)
endfunction
```

□

9. Coder la fonction `calculSuite` qui prend en paramètre un entier `m` et renvoie le tableau `tab` contenant les `m` premières valeurs de la suite (u_n) de l'énoncé.

Démonstration.

```
function tab = calculSuite(m)
    tab = zeros(1, m)
    tab(1) = 1
    for i = 1 : m-1
        tab(i+1) = f(tab(i))
    end
endfunction
```

Remarque
Dans ce code, on réalise un appel à la fonction `f`. Il faut aussi savoir coder la fonction `calculSuite` lorsque l'on ne demande pas au préalable de coder la fonction `f`.

```
function tab = calculSuite(m)
    tab = zeros(1, m)
    tab(1) = 1
    for i = 1 : m-1
        tab(i+1) = tab(i)^3 * exp(tab(i))
    end
endfunction
```

□

10. Coder la fonction `calculElementSuite` qui prend en paramètre un entier `m` et renvoie la variable `u` contenant le `m`$^{\text{ème}}$ élément de la suite (u_n) de l'énoncé.
(on ne pourra pas faire appel à la fonction précédente)

Démonstration.

```
function u = calculElementSuite(m)
    u = 1
    for i = 1 : m-1
        u = f(u)
    end
endfunction
```

□

Remarque
On peut faire la même remarque que dans la question précédente.
(quelle fonction `calculElementSuite` *obtient-on alors ?)*

Problème B

Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, soit f_k la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{(\ln x)^k}{x-1} & \text{si } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. Étude des fonctions f_k

a. Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
Lorsque x appartient à $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, donner la valeur de $f_k'(x)$.

Démonstration.

- La fonction f_k est dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ car c'est le quotient de :
  - × la fonction $x \mapsto (\ln x)^k$, dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$,
    (sur $]0, +\infty[$ *même mais c'est inutile ici)*
  - × la fonction $x \mapsto x - 1$, dérivable et qui ne s'annule pas sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
- Soit $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$. On a :

$$f_k'(x) = \frac{k\ (\ln x)^{k-1}\ \frac{1}{x}\ (x-1) - (\ln x)^k}{(x-1)^2} = \frac{(\ln x)^{k-1}}{x\ (x-1)^2}\ (k(x-1) - x \ln x)$$

$$\boxed{\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, \ \ f_k'(x) = \frac{(\ln x)^{k-1}}{x\ (x-1)^2}\ (k(x-1) - x \ln x)}$$

□

b. On considère les fonctions auxiliaires φ_k définies, pour tout $x > 0$, par :

$$\varphi_k(x) = k(x-1) - x \ln x$$

Étudier, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, les variations de la fonction φ_k.
Montrer que l'équation $\varphi_k(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]1, +\infty[$.
Dans la suite, on notera a_k cette solution.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

- La fonction φ_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ car c'est la somme de :
  - × la fonction $x \mapsto k(x-1)$, dérivable sur $]0, +\infty[$ car c'est une fonction polynomiale,
  - × la fonction $x \mapsto -x \ln x$, dérivable sur $]0, +\infty[$.
    (car produit de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ *...)*
- Soit $x \in]0, +\infty[$. On a :

$$\boxed{\varphi_k'(x) = k - \left(\ln x + x\ \frac{1}{x}\right) = k - 1 - \ln x}$$

- Déterminons le signe de $\varphi_k'(x)$.

$$\varphi_k'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; (k-1) - \ln x > 0 \;\Leftrightarrow\; (k-1) > \ln x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{k-1} > x$$

- On en déduit le tableau de variations suivant.

x	0		1		e^{k-1}		a_k		$+\infty$
Signe de $\varphi_k'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
Variations de φ_k	$-k$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{k-1}-k$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Détaillons les différents éléments de ce tableau.

× $\lim\limits_{x\to 0} \varphi_k(x) \;=\; \lim\limits_{x\to 0} k(x-1) - x\ln x \;=\; -k$ car $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x \;=\; 0$

× $\varphi_k(\mathrm{e}^{k-1}) \;=\; k\left(\mathrm{e}^{k-1}-1\right) - \mathrm{e}^{k-1}\ln\left(\mathrm{e}^{k-1}\right) \;=\; k\;\mathrm{e}^{k-1} - k - \mathrm{e}^{k-1}\,(k-1) \;=\; \mathrm{e}^{k-1} - k$

× Pour la limite en $+\infty$, on doit lever une forme indéterminée.

$$k(x-1) - x\ln x \;=\; kx - k - x\ln x \;=\; -x\ln x\left(\frac{k\cancel{x}}{-\cancel{x}\ln x} - \frac{k}{-x\ln x} + 1\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} -x\ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{k\cancel{x}}{-\cancel{x}\ln x} - \frac{k}{-x\ln x} + 1\right) = 1$

(on a formellement démontré que : $k(x-1) - x\ln x \underset{x\to+\infty}{\sim} -x\ln x$)

- La fonction $\varphi_k :]0,\mathrm{e}^{k-1}[\to \mathbb{R}$ est :
  1) continue sur $]0,\mathrm{e}^{k-1}[$,
  2) strictement croissante sur $]0,\mathrm{e}^{k-1}[$.

  La fonction φ_k réalise donc une bijection de $]0,\mathrm{e}^{k-1}[$ sur $\varphi_k(]0,\mathrm{e}^{k-1}[)$. Or :

$$\varphi_k(]0,\mathrm{e}^{k-1}[) \;=\;]\lim\limits_{x\to 0}\varphi_k(x), \varphi(\mathrm{e}^{k-1})[\;=\;]-k, \mathrm{e}^{k-1}-k[$$

- Comme $\mathrm{e}^{k-1} > k$ (pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$ avec égalité seulement si $x=0$), et $-k<0$, on a $0 \in\,]-k, \mathrm{e}^{k-1}-k[$.

$$\boxed{\text{L'équation } \varphi_k(x) = 0 \text{ admet une unique solution dans l'intervalle }]0,\mathrm{e}^{k-1}[.}$$

- La fonction $\varphi_k :\; [\mathrm{e}^{k-1}, +\infty[\to \mathbb{R}$ est :
  1) continue sur $[\mathrm{e}^{k-1}, +\infty[$,
  2) strictement décroissante sur $[\mathrm{e}^{k-1}, +\infty[$.

  La fonction φ_k réalise donc une bijection de $[\mathrm{e}^{k-1}, +\infty[$ sur $\varphi_k([\mathrm{e}^{k-1}, +\infty[)$. Or :

$$\varphi_k([\mathrm{e}^{k-1}, +\infty[) \;=\;]\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_k(x), \varphi(\mathrm{e}^{k-1})] \;=\;]-\infty, \mathrm{e}^{k-1}-k]$$

- Or $0 \in\,]-\infty, \mathrm{e}^{k-1}-k[$.

$$\boxed{\text{L'équation } \varphi_k(x) = 0 \text{ admet une unique solution dans l'intervalle }]\mathrm{e}^{k-1}, +\infty[.}$$

- Remarquons enfin que $\varphi_k(1) = k(1-1) - 1 \times \ln(1) = 0$. Or $\mathrm{e}^{k-1} > 1$ puisque $k > 1$. On en déduit que l'unique solution de l'équation $\varphi_k(x) = 0$ sur $]0, \mathrm{e}^{k-1}[$ est 1.

  On note alors a_k l'autre solution de l'équation $\varphi_k(x) = 0$.

On a démontré que l'équation $\varphi_k(x) = 0$ admet une unique solution sur $[\mathrm{e}^{k-1}, +\infty[\subset]1, +\infty[$, notée a_k.

  □

c. En distinguant les cas $k = 2$, k pair supérieur ou égal à 4, k impair supérieur ou égal à 3, donner le tableau de variations de la fonction f_k (on précisera les limites aux bornes).

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord que, pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$ on a :

$$f_k'(x) = \frac{(\ln x)^{k-1}}{x(x-1)^2} \left(k(x-1) - x \ln x\right) = \frac{(\ln x)^{k-1}\ \varphi_k(x)}{x(x-1)^2}$$

  Comme $x(x-1)^2 > 0$, on en déduit que $f_k'(x)$ est du signe de $(\ln x)^{k-1}\ \varphi_k(x)$.

D'après l'étude précédente, $\varphi_k(x) > 0$ si $x \in]1, a_k[$ et $\varphi_k(x) < 0$ si $x \in]0, 1[\cup]a_k, +\infty[$.

- Si $k = 2$, on obtient le tableau de variations suivant.

x	0		1		a_2		$+\infty$
Signe de $\ln(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\varphi_2(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Signe de $f_2'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f_2	$-\infty$	$\nearrow$			$f_2(a_2)$	$\searrow$	0

Détaillons les différents éléments de ce tableau.

× $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} (\ln x)^2 = +\infty$.

  Or $\lim\limits_{x \to 0} x - 1 = -1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f_k(x) = -\infty$.

× En $+\infty$, nous sommes confrontés à une forme indéterminée que l'on lève par mis en facteur du terme dominant.

  Tout d'abord : $\dfrac{(\ln x)^2}{x-1} = \dfrac{(\ln x)^2}{x} \dfrac{1}{1 - \frac{1}{x}}$.

  Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1$.

  Et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$ par croissances comparées.

  On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = 0$.

  (on a démontré que $f_2(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$*)*

- Si k pair supérieur ou égal à 4, on obtient un tableau similaire puisque comme $k-1$ impair, $(\ln x)^{k-1}$ est du signe de $\ln x$.

x	0		1		a_k		$+\infty$
Signe de $(\ln(x))^{k-1}$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\varphi_k(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Signe de $f_k'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f_k	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$f_k(a_k)$	$\searrow$	0

- Si k impair supérieur ou égal à 3, comme $k-1$ est pair, $(\ln x)^{k-1}$ est toujours positif. On obtient alors le tableau de variations suivant.

x	0		1		a_k		$+\infty$
Signe de $(\ln(x))^{k-1}$		$+$	0	$+$		$+$	
Signe de $\varphi_k(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Signe de $f_k'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f_k	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f_k(a_k)$	$\searrow$	0

Détaillons les différents éléments de ce tableau.

× $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} (\ln x)^k = -\infty$.

Or $\lim\limits_{x\to 0} x-1 = -1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f_k(x) = +\infty$.

× $f_k(1) = 0$ par définition de f_k.

× En $+\infty$, on démontre comme précédemment que $f_k(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln x)^k}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

2. Étude asymptotique de la suite $(a_k)_{k\geqslant 2}$

a. Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $e^{k-1} \leqslant a_k \leqslant e^k$.

Démonstration.

- On a démontré en quesiton ***1.b.*** que $e^{k-1} < a_k$.
- D'autre part, on a : $\varphi_k(a_k) = 0 > -k = k(e^k - 1) - e^k \ln(e^k) = \varphi_k(e^k)$.

  Or φ_k est strictement décroissante sur l'ensemble $[e^{k-1}, +\infty[$.
  En appliquant sa bijection réciproque, strictement décroissante, de part et d'autre de l'inégalité, on obtient : $a_k < e^k$.

$$\boxed{\text{Pour tout } k \geqslant 2, \text{ on a : } e^{k-1} \leqslant a_k \leqslant e^k}$$

□

b. Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on pose $a_k = \mathrm{e}^k(1+\delta_k)$.
Montrer que le réel δ_k vérifie l'équation :

$$-k\mathrm{e}^{-k} \;=\; (1+\delta_k)\;\ln(1+\delta_k)$$

Justifier l'inégalité $|\ln(1+\delta_k)| \leqslant k\mathrm{e}^{1-k}$.
En déduire que la suite $(\delta_k)_{k\geqslant 2}$ a une limite nulle et, plus précisément, que δ_k est équivalent à $-k\mathrm{e}^{-k}$ quand k tend vers $+\infty$.

Démonstration.

- Par définition, on a : $\varphi_k(a_k) \;=\; 0$. Ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi(a_k)\\
&= k\;(a_k-1) - a_k\ln(a_k)\\
&= k\;(\mathrm{e}^k\;(1+\delta_k)-1) - \mathrm{e}^k\;(1+\delta_k)\;\ln(\mathrm{e}^k(1+\delta_k))\\
&= k\;(\mathrm{e}^k\;(1+\delta_k)-1) - \mathrm{e}^k\;(1+\delta_k)\;(\ln(\mathrm{e}^k)+\ln(\delta_k))\\
&= k\;(\mathrm{e}^k\;(1+\delta_k)-1) - \mathrm{e}^k\;(1+\delta_k)\;(k+\ln(\delta_k))\\
&= \cancel{k\;\mathrm{e}^k\;(1+\delta_k)} - k - \cancel{\mathrm{e}^k\;(1+\delta_k)\;k} - \mathrm{e}^k\;(1+\delta_k)\;\ln(\delta_k)
\end{aligned}$$

  On en déduit que : $k \;=\; \mathrm{e}^k\;(1+\delta_k)\;\ln(\delta_k)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, on a : } -k\mathrm{e}^{-k} \;=\; (1+\delta_k)\;\ln(1+\delta_k).}$$

- Comme $\delta_k \neq -1$ (car $a_k \neq 0$), on en déduit que :

$$\ln(1+\delta_k) \;=\; \frac{-k\mathrm{e}^{-k}}{1+\delta_k} \;=\; \frac{-k\mathrm{e}^{-k}}{\frac{a_k}{\mathrm{e}^k}} \;=\; \frac{-k}{a_k}$$

  et donc $|\ln(1+\delta_k)| \;=\; \dfrac{k}{a_k}$. Or, d'après la question ***2.a***, $a_k \geqslant \mathrm{e}^{k-1}$ donc $\dfrac{1}{a_k} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^{k-1}} = \mathrm{e}^{1-k}$.

$$\boxed{|\ln(1+\delta_k)| \leqslant k\;\mathrm{e}^{1-k}}$$

- On a $k\;\mathrm{e}^{1-k} \;=\; \mathrm{e}^1 \times \dfrac{k}{\mathrm{e}^k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

  On en déduit que : $\ln(1+\delta_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc que $1+\delta_k \;=\; \mathrm{e}^{\ln(1+\delta_k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^0 = 1$.

$$\boxed{\text{Et ainsi : } \delta_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

- Enfin, on a :

$$\frac{-k\;\mathrm{e}^{-k}}{\delta_k} \;=\; \frac{(1+\delta_k)\;\ln(1+\delta_k)}{\delta_k} \;=\; (1+\delta_k)\;\frac{\ln(1+\delta_k)}{\delta_k}$$

  Or, comme $\delta_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a : $\dfrac{\ln(1+\delta_k)}{\delta_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \frac{-k\;\mathrm{e}^{-k}}{\delta_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ et donc que } \delta_k \underset{k\to+\infty}{\sim} -k\;\mathrm{e}^{-k}}$$

□

c. Justifier en conclusion qu'on a, quand k tend vers $+\infty$:

$$a_k - \mathrm{e}^k + k = \underset{k \to +\infty}{o}(k)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
a_k - \mathrm{e}^k + k &= \mathrm{e}^k\ (1 + \delta_k) - \mathrm{e}^k + k \\
&= \cancel{\mathrm{e}^k} + \mathrm{e}^k\ \delta_k - \cancel{\mathrm{e}^k} + k \\
&= \mathrm{e}^k\ \frac{\delta_k}{-k\ \mathrm{e}^{-k}} \times (-k\ \mathrm{e}^{-k}) + k \\
&= k - k\ \frac{\delta_k}{-k\ \mathrm{e}^{-k}} \\
&= k\ \left(1 - \frac{\delta_k}{-k\ \mathrm{e}^{-k}}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi : $\dfrac{a_k - \mathrm{e}^k + k}{k} = 1 - \dfrac{\delta_k}{-k\ \mathrm{e}^{-k}} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 1 - 1 = 0.$

$$\boxed{\text{Ceci signifie que } a_k - \mathrm{e}^k + k = \underset{k \to +\infty}{o}(k).}$$

$\square$

3. **Informatique.**

a. Coder la fonction φ_4 en **Scilab**.

Démonstration.

```
function y = phi4(x)
    y = 4 * (x-1) - x * log(x)
endfunction
```

$\square$

b. Écrire la fonction `calculSuite` qui prend en paramètre un entier `m` et renvoie le tableau `tab` contenant les `m` premiers éléments de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \varphi_4(u_n) \end{cases}$$

Démonstration.

```
function tab = calculSuite(m)
    tab = zeros(1, m)
    tab(1) = 5
    for i = 1 : m-1
        tab(i+1) = phi4(tab(i))
    end
endfunction
```

Remarque
Dans ce code, on réalise un appel à la fonction `f`. Il faut aussi savoir coder la fonction `calculSuite` lorsque l'on ne demande pas au préalable de coder la fonction `f`.

```
function tab = calculSuite(m)
    tab = zeros(1, m)
    tab(1) = 5
    for i = 1 : m-1
        tab(i+1) = 4 * (tab(i)-1) - tab(i) * log(tab(i))
    end
endfunction
```

□

c. Coder la fonction `calculElementSuite` qui prend en paramètre un entier `m` et renvoie la variable `u` contenant le `m`ème élément de la suite (u_n) précédente.
(on ne pourra pas faire appel à la fonction précédente)

Démonstration.

```
function u = calculElementSuite(m)
    u = 5
    for i = 1 : m-1
        u = phi4(u)
    end
endfunction
```

□

Remarque
On peut faire la même remarque que dans la question précédente.
(quelle fonction `calculElementSuite` *obtient-on alors ?)*