Devoir surveillé n° 6

Samedi 26 mars

Exercice 1

Pour tout nombre réel a, on considère la matrice $M(a) = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer $M(0)$ et $M(1/2)$.

Démonstration.

$$\boxed{M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

□

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, exprimer $M(a)$ en fonction des matrices I_2 et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et calculer J^2.

Démonstration.

- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} M(a) &= \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2a & 0 \\ 0 & -2a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1-2a)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } a \in \mathbb{R}, \text{ on a : } M(a) = (1-2a)\ I_2 + a\ J}$$

- $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{J^2 = 2\ J}$$

□

3. En déduire que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a l'égalité $M(a)M(b) = M(a+b-2ab)$.

Démonstration.
D'après la question précédente, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} M(a)M(b) &= ((1-2a)\ I_2 + a\ J) \times ((1-2b)\ I_2 + b\ J) \\ &= (1-2a)(1-2b)\ I_2 + (1-2a)b\ I_2J + (1-2b)a\ JI_2 + ab\ J^2 \\ &= (1-2a-2b+4ab)\ I_2 + (b-2ab+a-2ab)\ J + 2ab\ J \\ &= (1-2(a+b-2ab))\ I_2 + (a+b-2ab)\ J \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (a,b) \in \mathbb{R}^2, \text{ on a : } M(a)M(b) = M(a+b-2ab)}$$

□

4. On suppose que $a \neq \frac{1}{2}$.
Montrer que $M(a)$ est inversible et qu'il existe un $b \in \mathbb{R}$ tel que $M(b) = (M(a))^{-1}$.
On exprimera b en fonction de a.

Démonstration.
Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

- Il s'agit de démontrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que : $M(a)M(b) = I_2$.
- Or, d'après les questions précédentes : $M(a)M(b) = M(a + b - 2b)$ et $I_2 = M(0)$.
- Il suffit donc de trouver b tel que : $a + b - 2ab = 0$. Or :

$$a + b - 2ab = 0 \Leftrightarrow (1 - 2a)\, b = -a \Leftrightarrow b = \frac{-a}{1 - 2a}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } M(a) \text{ est inversible d'inverse } M(b) \text{ avec } b = \frac{-a}{1-2a}.}$$

□

5. La matrice $M(1/2)$ est-elle inversible ?

Démonstration.
Le déterminant de $M(1/2)$ vaut $\det(M(1/2)) = \det\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0.$

$$\boxed{\text{On en déduit que } M \text{ n'est pas inversible.}}$$

Remarque

- La notion de « déterminant » est à la limite du programme. Le terme n'est pas utilisé dans le BO mais il est clairement inscrit « caractérisation de l'inversibilité d'une matrice carrée d'ordre 2 ».
- Pour des matrices carrées d'ordre strictement supérieur à 2, on utilise la caractérisation suivante :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} M \text{ non inversible} & \Leftrightarrow & \text{Le système } MX = 0 \text{ n'est pas de Cramer} \\ & \Leftrightarrow & \text{Le système } MX = 0 \text{ admet une solution différente de } (0, \dots, 0) \end{array}}$$

- On peut donc rédiger la question précédente comme suit.
  Comme $M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, le système $MX = 0$ admet une solution non nulle. Le système $MX = 0$ n'étant pas de Cramer, la matrice M n'est pas inversible.

□

6. Déterminer l'unique nombre $a_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $(M(a_0))^2 = M(a_0)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, remarquons que :

$$M(a) = M(b) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-b & b \\ b & 1-b \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = b$$

- D'après la question ***3***, on a : $(M(a_0))^2 = M(a_0)M(a_0) = M(a_0 + a_0 - 2{a_0}^2) = M(2a_0 - 2{a_0}^2)$.
- Ainsi, $(M(a_0))^2 = M(a_0) \Leftrightarrow 2a_0 - 2{a_0}^2 = a_0 \Leftrightarrow a_0 - 2{a_0}^2 = 0 \Leftrightarrow a_0\,(1 - 2a_0) = 0$

On en déduit que $(M(a_0))^2 = M(a_0) \Leftrightarrow a_0 = 0$ `OU` $a_0 = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{L'unique } a_0 \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } (M(a_0))^2 = M(a_0) \text{ est } a_0 = \frac{1}{2}.}$$

□

7. On considère désormais les matrices $P = M(a_0)$ et $Q = I_2 - P$.

a. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $M(a) = P + \alpha Q$ et exprimer α en fonction de a.

Démonstration.

- Notons tout d'abord que $M(a_0) = M\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\ J$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Par définition, on a :

$$P + \alpha\ Q \ = \ M(a_0) + \alpha\ (I_2 - M(a_0)) \ = \ (1-\alpha)\ M(a_0) + \alpha\ I_2 \ = \ \frac{1-\alpha}{2}\ J + \alpha\ I_2$$

- D'autre part, par la question *2*, $M(a) = (1-2a)\ I_2 + a\ J$.
- On en déduit que : $M(a) - (P + \alpha Q) = (1 - 2a - \alpha)\ I_2 + \dfrac{2a - 1 + \alpha}{2}\ J$.

En prenant $\alpha = 1 - 2a$, on obtient bien $M(a) - (P + \alpha Q) = 0\ I_2 + 0\ J = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } M(a) = P + (1-2a)\ Q.}$$

□

b. Calculer P^2, PQ, QP et Q^2.

Démonstration.

- $P^2 \ = \ (M(a_0))^2 \ = \ M(a_0) \ = \ P$ par définition de a_0.
- $PQ \ = \ P(I_2 - P) \ = \ P - P^2 \ = \ P - P \ = \ 0$.
- $QP \ = \ (I_2 - P)P \ = \ P - P^2 \ = \ P - P \ = \ 0$.
- $Q^2 \ = \ Q(I_2 - P) \ = \ Q - QP \ = \ Q$

$$\boxed{\text{Ainsi : } P^2 = P,\ PQ = QP = 0 \text{ et } Q^2 = Q.}$$

□

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $(M(a))^n$ en fonction de P, Q, α et n.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $QP = PQ$, on a, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} M(a)^n \ &= \ (P + \alpha Q)^n \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{n-k}\ (\alpha\ Q)^k \\ &= \ \binom{n}{0} P^n + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} P^{n-k}\ (\alpha\ Q)^k \right) + \binom{n}{n} \alpha^n\ Q^n \\ &= \ P^n + \alpha^n\ Q^n \end{aligned}$$

En effet $P^{n-k}\ (\alpha\ Q)^k = \alpha^k\ P^{n-k}\ Q^k \ = \ \alpha^k\ P^{n-k-1}\ P\ Q^{k-1}\ Q \ = \ \alpha^k\ P^{n-k-1}\ Q^{k-1}\ \cancel{PQ} \ = \ 0$.
(il faut noter ici que $n - k \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$ puisque $k \in [\![1, n-1]\!] \ \Leftrightarrow \ n - k \in [\![1, n-1]\!]$)

- D'autre part, comme $P^2 = P$, on obtient par une récurrence immédiate que $P^n = P$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De même, $Q^n = Q$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{En conclusion : } M(a)^n \ = \ P + \alpha^n\ Q.}$$

□

d. Expliciter la matrice $(M(a))^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $a \neq \dfrac{1}{2}$, la formule obtenue est-elle valable pour $n = -1$?

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les questions précédentes, on a :

$$\begin{array}{rcl}
M(a)^n & = & P + \alpha^n\ Q \ = \ P + (1-2a)^n\ Q \\
& = & M(a_0) + (1-2a)^n\ (I_2 - M(a_0)) \\
& = & (1-2a)^n\ I_2 + (1-(1-2a)^n)\ M(a_0) \\
& = & (1-2a)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{2}\ (1-(1-2a)^n) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
& = & \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+(1-2a)^n & 1-(1-2a)^n \\ 1-(1-2a)^n & 1+(1-2a)^n \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\boxed{M(a)^n \ = \ \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+(1-2a)^n & 1-(1-2a)^n \\ 1-(1-2a)^n & 1+(1-2a)^n \end{pmatrix}}$$

- D'après la question ***4***, comme $a \neq \dfrac{1}{2}$, $M(a)$ est inversible d'inverse $M\left(\dfrac{-a}{1-2a}\right)$.

  × Or, d'après la question ***2***, on a :

$$M\left(\frac{-a}{1-2a}\right) \ = \ \left(1 - 2\ \frac{-a}{1-2a}\right)\ I_2 + \frac{-a}{1-2a}\ J \ = \ \frac{1}{1-2a}\ I_2 - \frac{a}{1-2a}\ J$$

  × D'autre part, on a :

$$\frac{1}{2}\ (1-(1-2a)^{-1}) \ = \ \frac{1}{2}\ \left(1 - \frac{1}{1-2a}\right) \ = \ \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{-\cancel{2}a}{1-2a} \ = \ \frac{-a}{1-2a}$$

  On retrouve ainsi la ligne 3 du calcul précédent.

$$\boxed{\text{On en conclut que la formule est valable pour } n = -1.}$$

□

Exercice 2

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 = 4A - 8I_2$.

Démonstration.

- $4A - 8I_2 \ = \ 4\ (A - 2\ I_2) \ = \ 4 \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

- $A^2 \ = \ A \times A \ = \ \begin{pmatrix} -4 & 20 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{On a donc bien } A^2 = 4A - 8I_2.}$$

□

2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Démonstration.
D'après l'égalité précédente, on a :

$$\begin{array}{rrcl} & 4A - A^2 & = & 8\ I_2 \\ \text{donc} & A\ (4\ I_2 - A) & = & 8\ I_2 \\ \text{et} & A\ \left(\dfrac{1}{8}\ (4\ I_2 - A)\right) & = & I_2 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la matrice } A \text{ est inversible d'inverse}}$$

□

3. Retrouver A^{-1} à l'aide de la formule de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2.

Démonstration.

- Le déterminant de A est : $\det(A) \ = \ 1 \times 3 - (-1) \times 5 \ = \ 3 + 5 \ = \ 8 \neq 0$.
- Ainsi, A est inversible d'inverse $A^{-1} \ = \ \dfrac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, on retrouve bien : } A^{-1} \ = \ \dfrac{1}{8}\ (4\ I_2 - A)}$$

□

Exercice 3

Dans cet exercice, on définit sur $]0, +\infty[$ la fonction f par :

$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \ f(x) = \sqrt{x} \ln x$$

1. Justifier que son ensemble de définition est bien $]0, +\infty[$.

Démonstration.
La quantité $\sqrt{x}\ \ln(x)$ est définie si :

× la quantité $\sqrt{x}$ est définie *i.e.* si $x \geqslant 0$,

× la quantité $\ln(x)$ est définie *i.e.* si $x > 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathscr{D}_f \ = \,]0, +\infty[.}$$

□

2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0, en précisant la valeur en 0 de la fonction prolongée.
On appellera désormais f la fonction prolongée, définie sur $[0, +\infty[$.

Démonstration.
On effectue le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$ (ainsi $x = \dfrac{1}{X}$).
Si $x \to 0^+$, alors $X \to +\infty$. On en déduit que :

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\ \ln(x) \ = \ \lim_{X \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{X}}\ \ln\left(\frac{1}{X}\right) \ = \ \lim_{X \to +\infty} \frac{-\ln(X)}{\sqrt{X}} \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{On peut prolonger la fonction } f \text{ par continuité en posant } f(0) = 0}$$

□

3. Étudier la continuité de f.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ car c'est le produit de :
  - $\times$ la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, continue sur $]0,+\infty[$,
  - $\times$ et de la fonction $x \mapsto \ln(x)$, continue sur $]0,+\infty[$.
- D'autre part, d'après la question précédente, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } f \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$$

□

4. Démontrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$. Est-elle dérivable en 0 ?
Quelle est l'allure de la courbe de f au point d'abscisse $x = 0$?

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ car est le produit de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ (*cf* question précédente).
- Soit $x \neq 0$.

$$\tau_0(f)(x) \;=\; \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \;=\; \frac{f(x)}{x} \;=\; \frac{\sqrt{x}\,\ln(x)}{x} \;=\; \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$$

En effet :

$\times$ $\sqrt{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0^+$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$,

$\times$ $\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$$

- On en déduit que la courbe de f admet une tangente verticale (dirigée vers le bas) en 0. □

5. Donner le développement limité à l'ordre 1 en 1 de f.

Démonstration.

- Soit $x > 0$.

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{x}}\;\ln(x) + \sqrt{x}\;\frac{1}{x} \;=\; \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \;=\; \frac{\ln(x)+2}{2\;\sqrt{x}}$$

$$\boxed{\forall x > 0,\; f'(x) \;=\; \frac{\ln(x)+2}{2\;\sqrt{x}}}$$

- Le développement limité à l'ordre 1 de f est :

$$f(x) \;=\; f(1) + f'(1)\;(x-1) + \underset{x\to 1}{o}(x-1)$$

Or $f(1) \;=\; \sqrt{1}\;\ln(1) \;=\; 0$ et $f'(1) \;=\; \dfrac{\ln(1)+2}{2\;\sqrt{1}} \;=\; 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } f(x) \;=\; (x-1) + \underset{x\to 1}{o}(x-1)}$$

□

6. Dresser le tableau de variations de f, en précisant valeurs et limites aux bornes.

Démonstration.

- Soit $x > 0$. On détermine le signe de $f'(x)$. Comme $2\sqrt{x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $\ln(x) + 2$. Or :

$$\ln(x) + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln(x) = -2 \;\Leftrightarrow\; x = \mathrm{e}^{-2}$$

- On en déduit le tableau de variations de f.

x	0		e^{-2}		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Variations de f	0	$\searrow$	$f(\mathrm{e}^{-2})$	$\nearrow$	$+\infty$

Avec $f(\mathrm{e}^{-2}) = \sqrt{\mathrm{e}^{-2}}\ \ln(\mathrm{e}^{-2}) = \dfrac{-2}{\sqrt{\mathrm{e}^2}} = -\dfrac{2}{\mathrm{e}}$. ☐

7. Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et donner $f''(x)$ pour $x > 0$.

Démonstration.

- La fonction f' est dérivable sur $]0, +\infty[$ car c'est le quotient de :
  - × $x \mapsto \ln(x) + 2$ dérivable sur $]0, +\infty[$,
  - × $x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $]0, +\infty[$ et qui ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est deux fois dérivable sur }]0, +\infty[.}$$

(en fait, on démontre de même que f est C^∞ sur $]0, +\infty[$)

- Soit $x > 0$.

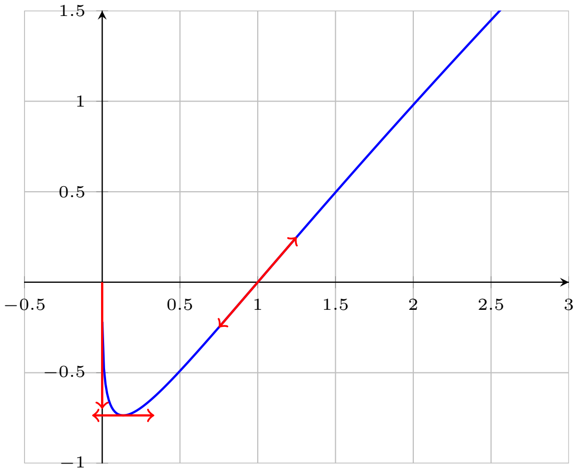
$$f''(x) \;=\; (f')'(x) \;=\; \frac{\frac{1}{x}\ 2\sqrt{x} - (\ln(x) + 2)\ \cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}}{(2\ \sqrt{x})^2} \;=\; \frac{\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{\ln(x)+2}{\sqrt{x}}}{4\ x} \;=\; -\frac{\ln(x)}{4\ x\ \sqrt{x}}$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ f''(x) \;=\; -\frac{\ln(x)}{4\ x\ \sqrt{x}}}$$

(on pourrait déterminer le signe de $f''(x)$ en remarquant que $f''(x)$ est du signe de $-\ln(x)$) ☐

8. Tracer la courbe de f, en représentant tous les éléments remarquables précédents.
On donne : $\mathrm{e}^{-2} \approx 0,14$ $\qquad 2/\mathrm{e} \approx 0,74$

Démonstration.



☐

Exercice 4

Le but de cet exercice est de donner des formules explicites des suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par les premiers termes :

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 1$$

et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcrrr} u_{n+1} & = & 3u_n & -2v_n & -w_n \\ v_{n+1} & = & u_n & & -w_n \\ w_{n+1} & = & 2u_n & -2v_n & \end{array} \right.$$

Partie I - Puissances de matrice

1. On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $C - \lambda I_3$ est-elle inversible ?

Démonstration.
La matrice $C - \lambda I_3$ est inversible si et seulement si le système $(C - \lambda I_3)\ X = 0$ est de Cramer.
Notons (S) ce système :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (3-\lambda)\ x & - & 2\ y & - & z & = & 0 \\ x & - & \lambda\ y & - & z & = & 0 \\ 2\ x & - & 2\ y & - & \lambda\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

On applique l'algorithme du pivot de Gauss afin de résoudre ce système.

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & \lambda\ y & - & z & = & 0 \\ (3-\lambda)\ x & - & 2\ y & - & z & = & 0 \\ 2\ x & - & 2\ y & - & \lambda\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & \lambda\ y & - & z & = & 0 \\ & & (-2+\lambda\,(3-\lambda))\ y & + & (2-\lambda)\ z & = & 0 \\ & & (2\lambda - 2)\ y & + & (2-\lambda)\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

Or : $-2 + \lambda\ (3-\lambda) = -2 + 3\lambda - \lambda^2 = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)$.
Le système précédent se réécrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & \lambda\ y & - & z & = & 0 \\ & - & (\lambda-1)(\lambda-2)\ y & + & (2-\lambda)\ z & = & 0 \\ & & 2\,(\lambda-1)\ y & + & (2-\lambda)\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

On souhaite effectuer l'opération $L_3 \to (\lambda - 2)\ L_3 + 2\ L_2$. Elle n'est valide que si $\lambda \neq 2$.
Deux cas se présentent alors.

(1) Si $\lambda = 2$, le système se réécrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2\ y & - & z & = & 0 \\ & & 2\ y & & & = & 0 \end{array} \right.$$

Le système obtenu est triangulaire supérieur mais l'un de ses cœfficients diagonaux est nul. Ainsi, le système (S) n'est pas de Cramer et la matrice $C - \lambda\ I_3$ n'est pas inversible si $\lambda = 2$.

(2) Si $\lambda \neq 2$, on effectue l'opération $L_3 \to (\lambda - 2)\ L_3 + 2\ L_2$:

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & \lambda\ y & - & z & = & 0 \\ & - & (\lambda-1)(\lambda-2)\ y & + & (2-\lambda)\ z & = & 0 \\ & & & & (\lambda-2)(2-\lambda) + 2\ (2-\lambda)\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

Or : $(\lambda - 2)(2 - \lambda) - 2\ (2 - \lambda) = (2 - \lambda)(\lambda - 2 + 2) = \lambda\ (2 - \lambda)$.
Le système se réécrit donc sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & \lambda\ y & - & z & = & 0 \\ & - & (\lambda-1)(\lambda-2)\ y & + & (2-\lambda)\ z & = & 0 \\ & & & & \lambda\ (2-\lambda)\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

Le système obtenu est triangulaire supérieur.
Il est de Cramer si ses cœfficients diagonaux sont tous non nuls *i.e.* si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq 2$.

$$\boxed{\text{La matrice } C - \lambda\ I_3 \text{ est inversible si et seulement si } \lambda \neq 0 \text{ et } \lambda \neq 1 \text{ et } \lambda \neq 2.}$$

Remarque

- Si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$, la matrice $C - \lambda\ I_3$ n'est pas inversible.
  Autrement dit, le système $(C - \lambda\ I_3)\ X = 0$ n'est pas de Cramer. Il admet donc une solution autre que la solution nulle $(0, 0, 0)$. Ceci revient à dire, dans ce cas, que :
  $$\exists X \neq 0,\ (C - \lambda\ I_3)\ X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists X \neq 0,\ CX = X$$
- Les éléments $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $C - \lambda\ I_3$ n'est pas inversible sont appelés des valeurs propres de la matrice C. Les vecteurs X associés (ceux tels que $CX = \lambda X$) sont appelés vecteurs propres. La recherche des éléments propres associés à une matrice C est essentielle afin de pouvoir écrire cette matrice sous une forme réduite (au mieux, $C = PDP^{-1}$ avec D diagonale).
  C'est ce que l'on va voir dans la suite du problème. □

2. Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

Démonstration.
On applique la méthode du pivot de Gauss sous sa forme matricielle.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On réalise alors : $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On réalise alors : $\{\ L_2 \leftrightarrow L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

On réalise alors : $\{\ L_1 \leftarrow L_1 + L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

On réalise alors : $\{\ L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

On réalise alors : $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array} \right.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } P \text{ est inversible d'inverse } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

b. Démontrer que $D = P^{-1}CP$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- D'autre part : $CP = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{On en déduit que } PD = CP \text{ et donc que } D = P^{-1}CP.}$$

□

3. Exprimer la matrice C en fonction de D, P et P^{-1}.
Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C^n = PD^nP^{-1}$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, $PD = CP$.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } C = PDP^{-1}}$$

- Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : C^n = PD^nP^{-1}$.

  1) **Initialisation** :

  × D'une part, $C^0 = I_3$.

  × D'autre part, $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.

  Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

  2) **Hérédité** :
  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $C^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$).
  Par définition, $C^{n+1} = C^n \times C$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} C^{n+1} &= PD^nP^{-1} \times C \ = \ PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} \ = \ PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^nI_3DP^{-1} \ = \ P(D^nD)P^{-1} \ = \ PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on a : } \forall n \in \mathbb{N},\ C^n = PD^nP^{-1}.}$$

□

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Expliciter la matrice D^n puis donner les coefficients de C^n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} C^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2^n & -2^n & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2^n & -2^n & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C^n = \begin{pmatrix} 1+2^n & -2^n & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2^n & -2^n & 0 \end{pmatrix}}$$

□

Partie II - Suites

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

Montrer que $X_{n+1} = CX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u_n - 2v_n - w_n \\ u_n - w_n \\ 2u_n - 2v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = CX_n.}$$

□

6. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : X_n = C^n X_0$.

1) **Initialisation** : $C^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$
Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

2) **Hérédité** :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $X_{n+1} = C^{n+1}X_0$).
Par définition, $X_{n+1} = CX_n$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, on a :

$$X_{n+1} = CX_n = C \times C^n X_0 = C^{n+1} X_0$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on a : } \forall n \in \mathbb{N},\ X_n = C^n X_0.}$$

□

7. Que vaut X_0 ? En déduire X_n, puis u_n, v_n et w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

- $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- On en déduit que :

$$X_n = C^n X_0 = \begin{pmatrix} 1+2^n & -2^n & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2^n & -2^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \\ 2^n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n,\ v_n = 0,\ w_n = 2^n.}$$

□

Problème A

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$$

Le but de ce problème est d'étudier l'équation $f_n(x) = 0$ et le comportement de la solution quand n tend vers $+\infty$.

1. a. Dresser le tableau de variations de f_n et montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ car c'est une fonction polynomiale.
  De plus pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:
  $$f_n'(x) \;=\; nx^{n-1} + 18x$$
  Pour tout $x \geqslant 0$, $x^{n-1} \geqslant 0$. Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$, $f_n'(x) \geqslant 0$.
  Enfin, on note que : $f_n'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$.
- On en déduit le tableau de variations de la fonction f_n.

x	0	u_n	$+\infty$
Signe de $f_n'(x)$	0	$+$	
Variations de f_n	-4	0	$+\infty$

- La fonction f_n est :
  - $\times$ continue sur $[0, +\infty[$,
  - $\times$ strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

  Elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f_n([0, +\infty[)$. Or :
  $$f_n([0, +\infty[) \;=\; [f_n(0), \lim_{x \to +\infty} f_n(x)[\;=\; [-4, +\infty[$$

$$\boxed{\text{Comme } 0 \in [-4, +\infty[, \text{ on en déduit que } 0 \text{ admet un unique antécédent } u_n \in [0, +\infty[\text{ par la fonction } f_n.}$$ □

b. Calculer u_1 et u_2.

Démonstration.

- u_1 est l'unique antécédent, dans l'intervalle $[0, +\infty[$, de 0 par la fonction $f_1 : x \mapsto x + 9x^2 - 4$.
  f_1 est un polynôme de degré 2 de discriminant : $\Delta = 1 - 4 \times (-4) \times 9 = 1 + 144 = 145$.
  Ainsi, f_1 admet deux racines :
  $$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{145}}{18} > 0 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{145}}{18} < 0$$
  En effet, $\sqrt{145} > \sqrt{144} = 12$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } u_1 \;=\; \frac{-1 + \sqrt{145}}{18}}$$

- u_2 est l'unique antécédent, dans l'intervalle $[0, +\infty[$, de 0 par la fonction $f_2 : x \mapsto 10x^2 - 4$.
  Or : $10x^2 - 4 = (\sqrt{10}\,x)^2 - 2^2 = (\sqrt{10}\,x - 2)(\sqrt{10}\,x + 2)$.
  Ainsi, f_2 a pour racines :

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt{10}} > 0 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-2}{\sqrt{10}} < 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } u_2 \ = \ \frac{2}{\sqrt{10}}}$$

□

c. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n \in \left]0, \dfrac{2}{3}\right[$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord remarquons que :
  × $f_n(0) \ = \ -4 < 0$,
  × $f_n(u_n) \ = \ 0$,
  × $f_n\left(\dfrac{2}{3}\right) \ = \ \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 9\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 - 4 \ = \ \left(\dfrac{2}{3}\right)^n > 0$.

  On en déduit que : $\quad f_n(0) \ < \ f_n(u_n) \ < \ f_n\left(\dfrac{2}{3}\right)$.
- Or, d'après le théorème de la bijection, la fonction $f_n^{-1} : [-1, +\infty[\to [0, +\infty[$ est strictement croissante.

$$\boxed{\text{En appliquant } f_n^{-1} \text{ de part et d'autre de l'inégalité, on obtient : } 0 \ < \ u_n \ < \ \frac{2}{3}}$$

□

2. a. Montrer que pour tout réel x de $]0, 1[$, on a $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1[$.

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= (x^{n+1} + 9x^2 - 4) - (x^n + 9x^2 - 4) \ = \ x^{n+1} + \cancel{9x^2} - \cancel{4} - x^n - \cancel{9x^2} + \cancel{4} \\ &= x^{n+1} - x^n \ = \ x^n\ (x-1) \end{aligned}$$

Or $0 < x < 1$ donc $x - 1 < 0$ et $x^n > 0$. Ainsi $0 < x^{n+1} < x^n$.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0.}$$

□

b. En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$ puis les variations de la suite (u_n).

Démonstration.

- D'après la question précédente, on a :

$$f_n(u_{n+1}) > f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 \quad \textit{(par définition)}$$

$$\boxed{f_n(u_{n+1}) > 0}$$

- Or $f_n(u_n) = 0$. On en déduit que : $\quad f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$.
  Par application de la fonction f_n^{-1}, strictement croissante, on obtient : $u_{n+1} > u_n$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

□

c. Montrer que (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

Démonstration.
D'après les questions précédentes, la suite (u_n) est croissante et majorée par $\dfrac{2}{3}$.

$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est convergente et que sa limite } \ell \text{ est telle que : } 0 \leqslant \ell \leqslant \frac{2}{3}.}$ □

3. a. Déterminer un encadrement de ${u_n}^n$ pour tout $n \geqslant 1$ et en déduire la limite de ${u_n}^n$ quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
D'après la question ***1.c.*** : $0 \ < \ u_n \ < \ \dfrac{2}{3}$.
La fonction élévation à la puissance n étant strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit :

$$0 \ < \ {u_n}^n \ < \ \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Or $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (car $\frac{2}{3} \in \,]-1, 1[$).

$\boxed{\text{Par le théorème d'encadrement, on en déduit que } ({u_n}^n) \text{ est convergente de limite } 0.}$ □

b. Donner enfin la valeur de ℓ.

Démonstration.
- Par définition, $f_n(u_n) = {u_n}^n + 9\ {u_n}^2 - 4 = 0$.
- On en déduit que : $9\ {u_n}^2 = 4 - {u_n}^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 4$.
- Enfin, $u_n = \dfrac{1}{3}\ \sqrt{9\ {u_n}^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}\sqrt{4} = \dfrac{2}{3}$.

$$\boxed{\text{La limite } \ell \text{ de } (u_n) \text{ est } \ell = \frac{2}{3}.}$$ □

4. On note $u_n = \dfrac{2}{3} + v_n$.

a. Vérifier que v_n tend vers 0.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition : $v_n = u_n - \dfrac{2}{3}$.

$\boxed{\text{On en déduit que } (v_n) \text{ est convergente, de limite } \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0.}$ □

b. Montrer que $\left(\dfrac{2}{3} + v_n\right)^n + 9\ {v_n}^2 + 12\ v_n = 0$.

Démonstration.

- Par définition : $f_n(u_n) = {u_n}^n + 9{u_n}^2 - 4 = 0$.
- Or : $u_n = \dfrac{2}{3} + v_n$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3} + v_n\right)^n + 9\ \left(\frac{2}{3} + v_n\right)^2 - 4 &= \left(\frac{2}{3} + v_n\right)^n + 9\ \left(\frac{4}{9} + \frac{4}{3}v_n + {v_n}^2\right) - 4 \\ &= \left(\frac{2}{3} + v_n\right)^n + \cancel{4} + 12\ v_n + 9\ {v_n}^2 - \cancel{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \left(\frac{2}{3} + v_n\right)^n + 9\ {v_n}^2 + 12\ v_n = 0.}$$

□

c. En déduire que $v_n = \dfrac{-\left(\dfrac{2}{3} + v_n\right)^n}{9\ v_n + 12}$ puis que v_n est équivalent à $-\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, on a :

$$v_n\ \ (9v_n + 12) = -\left(\frac{2}{3} + v_n\right)^n$$

Or $9v_n + 12 \neq 0$. En effet, $0 < u_n < \frac{2}{3}$ donc $-\frac{2}{3} < \underbrace{u_n - \frac{2}{3}}_{v_n} < 0$ et enfin $6 < 9v_n + 12 < 12$.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } v_n = \frac{-\left(\frac{2}{3} + v_n\right)^n}{9\ v_n + 12}.}$$

- Ainsi :

$$\frac{v_n}{-\frac{1}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{\left(\frac{2}{3} + v_n\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}\ \frac{12}{9\ v_n + 12} = \left(\frac{\frac{2}{3} + v_n}{\frac{2}{3}}\right)^n\ \frac{12}{9\ v_n + 12} = \left(1 + \frac{3}{2}\ v_n\right)^n\ \frac{12}{9\ v_n + 12}$$

Étudions ces deux dernières quantités.

× $\dfrac{12}{9\ v_n + 12} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{12}{12} = 1$ car $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$,

× $\left(1 + \dfrac{3}{2}\ v_n\right)^n = \exp\left(n\ \ln\left(1 + \dfrac{3}{2}\ v_n\right)\right) = \exp\left(n\ \dfrac{\ln\left(1 + \frac{3}{2}\ v_n\right)}{\frac{3}{2}\ v_n}\ \dfrac{3}{2}\ v_n\right)$

Comme $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, $\dfrac{\ln\left(1 + \frac{3}{2}\ v_n\right)}{\frac{3}{2}\ v_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

D'autre part, $n\ v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ *(cf démonstration plus loin).*

On en déduit que $\left(1 + \dfrac{3}{2}\ v_n\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$.

$$\boxed{\text{En conclusion, } \frac{v_n}{-\frac{1}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ et donc } v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

Il reste à montrer que $n\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

- On a démontré que : $v_n\ \ (9v_n + 12) \ = \ -\left(\frac{2}{3} + v_n\right)^n \ = \ -{u_n}^n$.
- On en déduit que : $n\ v_n\ \ (9v_n + 12) \ = \ -n\ {u_n}^n$. Ou encore :

$$n\ v_n \ = \ -n\ {u_n}^n \times \frac{1}{9v_n + 12}$$

  × $\frac{1}{9v_n + 12} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{12}$,

  × D'autre part : $0 < n\ {u_n}^n < n\ \left(\frac{2}{3}\right)^n$ (d'après la question ***3.a.***).

  Or : $n\ \left(\frac{2}{3}\right)^n \ = \ \frac{n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

  On en déduit, par le théorème d'encadrement, que $n\ {u_n}^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en conclut que $n\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

5. Définir en **Scilab** la fonction `f5`, qui prend un réel x et calcule $f_5(x)$.
Tracer en **Scilab** la courbe représentative de f_5.

Démonstration.

```
function y = f5(x)
    y = x^5 + 9 * x^2 - 4
endfunction
```

La commande suivante permet de tracer la courbe représentative de `f5` sur l'intervalle $[0, 50]$.

```
plot(linspace(0, 50), f5)
```

□

6. Compléter le programme suivant, pour calculer u_5 par la méthode de dichotomie, à 10^{-4} près.

Démonstration.
On a démontré en question ***1.c.*** que : $0 \ < \ u_5 \ < \ \frac{2}{3}$ et $f_5(0) < 0$ et $f_5\left(\frac{2}{3}\right) > 0$.

On utilise les valeurs 0 et $\frac{2}{3}$ pour initialiser la méthode de dichotomie.

```
g = 0
d = 2/3
m = (g+d)/2
while d-g > 10^(-4)
    if f5(m) > 0 then
        d = m
    else
        g = m
    end
    m = (g+d)/2
end
disp(g)
```

On a choisi ici d'afficher `g` mais on peut afficher toute valeur comprise dans l'intervalle $[\mathtt{g}, \mathtt{d}]$. □

Problème B (d'après EDHEC 2004)

Pour tout entier naturel n, la fonction f_n est définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x \ \mathrm{e}^{-n/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f_n est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$ comme produit des fonctions :
  - $\times$ $x \mapsto x$, continue sur $]0, +\infty[$,
  - $\times$ $x \mapsto \mathrm{e}^{-n/x}$, continue sur $]0, +\infty[$ car composée de :
    - *(i)* $x \mapsto -\dfrac{n}{x}$, continue sur $]0, +\infty[$,
      et telle que $f_n(\,]0, +\infty[\,) \subset \mathbb{R}$.
    - *(ii)* et de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ continue sur $\mathbb{R}$.
- De plus, comme $\lim\limits_{x \to 0^+} -\dfrac{n}{x} = -\infty$, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{-n/x} = 0 = f_n(0)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f_n \text{ est continue sur } [0, +\infty[.}$$

- De même, f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$.
- Afin de déterminer si f_n est dérivable en 0, on étudie son taux d'accroissement en ce point.

$$\tau_0(f_n)(x) = \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \frac{\cancel{x} \ \mathrm{e}^{-n/x}}{\cancel{x}} = \mathrm{e}^{-n/x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{f_n \text{ est donc dérivable sur } [0, +\infty[.}$$

□

2. Étudier les variations de f_n, ainsi que sa limite en $+\infty$. Dresser son tableau de variations.

Démonstration.
Soit $x > 0$.

$$f_n'(x) = \mathrm{e}^{-n/x} + x \ \frac{n}{x^2} \ \mathrm{e}^{-n/x} = \left(1 + \frac{n}{x}\right) \ \mathrm{e}^{-n/x} > 0$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	0		$+\infty$
Signe de $f_n'(x)$	0	$+$	
Variations de f_n	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\boxed{\text{En effet, comme } \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-n/x} = \mathrm{e}^0 = 1, \text{ on a : } \lim_{x \to +\infty} x \ \mathrm{e}^{-n/x} = +\infty.}$$

□

3. La fonction f_n est-elle deux fois dérivable sur tout son ensemble de définition ?
Préciser $f_n''(x)$ pour tout x en lequel f_n est deux fois dérivable.

Démonstration.

- On démontre, comme en question ***1.*** que f_n est dérivable deux fois sur $]0,+\infty[$.
(f_n est même C^∞ sur $]0,+\infty[$)
- Afin de déterminer si f_n' est dérivable en 0, on étudie son taux d'accroissement en ce point.

$$\tau_0(f_n')(x) = \frac{f_n'(x)-f_n'(0)}{x-0} = \frac{\left(1+\frac{n}{x}\right)\ \mathrm{e}^{-n/x}}{x} = \frac{\mathrm{e}^{-n/x}}{x} + n\ \frac{\mathrm{e}^{-n/x}}{x^2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

En effet, en procédant comme précédemment, on obtient :

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\mathrm{e}^{-n/x}}{x^2} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nX}}{\frac{1}{X^2}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X^2}{\mathrm{e}^{nX}} = 0 \quad \textit{(par croissances comparées)}$$

$$\boxed{f_n \text{ est donc deux fois dérivable sur } [0,+\infty[.}$$

- Soit $x>0$. On a alors :

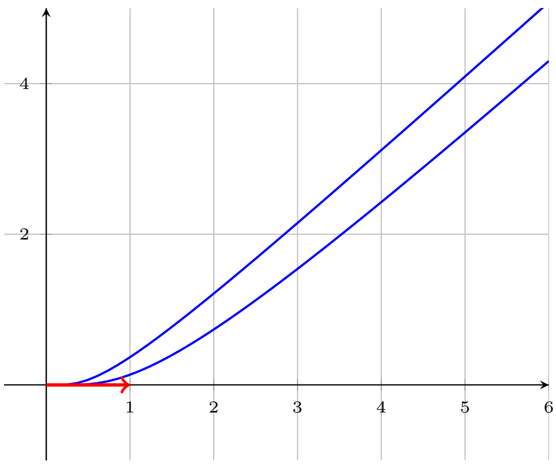
$$f_n''(x) = -\frac{n}{x^2}\ \mathrm{e}^{-n/x} + \left(1+\frac{n}{x}\right)\ \frac{n}{x^2}\ \mathrm{e}^{-n/x} = \frac{n^2}{x^3}\ \mathrm{e}^{-n/x}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f_n''(x) = \begin{cases} \dfrac{n^2}{x^3}\ \mathrm{e}^{-n/x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}}$$

□

4. Tracer dans un même repère l'allure des courbes représentatives de f_1 et f_2.

Démonstration.



□

5. ***a.*** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n)=1$.

Démonstration.
La fonction f_n est :

× continue sur $[0,+\infty[$,

× strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f_n([0,+\infty[)$. Or :

$$f_n([0,+\infty[) = [f_n(0), \lim_{x\to+\infty} f_n(x)[= [0,+\infty[$$

> Comme $1 \in [0, +\infty[$, on en déduit que 1 admet un unique antécédent $u_n \in [0, +\infty[$ par la fonction f_n.

□

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n > 1$, et u_n est solution de l'équation $x \ln x = n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord, remarquons que :
  × $f_n(u_n) \ = \ 1$ par définition,
  × $f_n(1) \ = \ 1 \ \mathrm{e}^{-n/1} \ = \ \mathrm{e}^{-n} \ < \ \mathrm{e}^0 \ = \ 1$.

  Ainsi $f_n(u_n) \ > \ f_n(1)$.
- Or, d'après le théorème de la bijection, la fonction $f_n^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ est strictement croissante.

> En appliquant f_n^{-1} de part et d'autre de l'inégalité, on obtient : $u_n > 1$.

Par ailleurs, on a :

$$f_n(u_n) \ = \ 1 \ \Leftrightarrow \ u_n \ \mathrm{e}^{-n/u_n} \ = \ 1 \ \Leftrightarrow \ u_n \ = \ \mathrm{e}^{n/u_n} \ \Leftrightarrow \ \ln(u_n) \ = \ \frac{n}{u_n} \ \Leftrightarrow \ u_n \ \ln(u_n) \ = \ n$$

> u_n est donc solution de l'équation $x \ln x = n$.

□

c. Étudier la fonction g définie par $g(x) = x \ln x$.
En déduire que la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ est $+\infty$.

Démonstration.

- La fonction g est C^∞ sur $]0, +\infty[$ car produit des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$ qui sont C^∞ sur $]0, +\infty[$.
- De plus, $\lim\limits_{x \to 0} \ f(x) \ = \ \lim\limits_{x \to 0} \ x \ln(x) \ = \ 0$.
  Ainsi, g est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.
- La fonction g n'est pas dérivable en 0. En effet :

$$\tau_0(g)(x) \ = \ \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \ = \ \frac{\cancel{x} \ln(x)}{\cancel{x}} \ = \ \ln(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\infty$$

- Soit $x > 0$.

$$g'(x) \ = \ \ln(x) + x \ \frac{1}{x} \ = \ 1 + \ln(x)$$

  Or : $\ g'(x) \ = \ 0 \ \Leftrightarrow \ 1 + \ln(x) \ = \ 0 \ \Leftrightarrow \ \ln(x) \ = \ -1 \ \Leftrightarrow \ x \ = \ \mathrm{e}^{-1}$
- On en déduit le tableau de variations de g.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de g	0	↘	$-\mathrm{e}^{-1}$	↗	$+\infty$

- La fonction g est :

  $\times$ continue sur $[\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$,

  $\times$ strictement croissante sur $[\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.

  Elle réalise donc une bijection de $[\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$ sur $g([\mathrm{e}^{-1}, +\infty[)$. Or :

$$g([\mathrm{e}^{-1}, +\infty[) \ = \ [g(\mathrm{e}^{-1}), \lim_{x\to+\infty} g(x)[\ = \ [-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$$

- On note alors $g^{-1} : [-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[\to [\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$ la bijection réciproque de $g_{|[\mathrm{e}^{-1},+\infty[}$.
  Son tableau de variations est :

x	$-\mathrm{e}^{-1}$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Variations de g^{-1}	e^{-1} $\nearrow$ $+\infty$

- Or $g(u_n) \ = \ n$ donc $u_n \ = \ g^{-1}(n)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \lim_{n\to+\infty} u_n \ = \ \lim_{n\to+\infty} g^{-1}(n) \ = \ +\infty}$$

□

d. Montrer que $\ln u_n + \ln(\ln u_n) = \ln n$ et en déduire un équivalent simple de u_n.

Démonstration.

- D'après la question ***5.b.***, $g(u_n) \ = \ n$. Or :

$$g(u_n) \ = \ n \ \Leftrightarrow \ u_n \ \ln(u_n) \ = \ n \ \Leftrightarrow \ \ln(u_n \ \ln(u_n)) \ = \ \ln(n) \ \Leftrightarrow \ \ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) \ = \ \ln(n)$$

  L'écriture $\ln(\ln(u_n))$ est valide car on a démontré en ***5.b.*** que $u_n > 1$ et donc $\ln(u_n) > 0$.

- Comme $\ln(u_n) \neq 0$, on a :

$$1 + \frac{\ln(\ln(u_n))}{\ln(u_n)} \ = \ \frac{\ln(n)}{\ln(u_n)}$$

  On pose alors le changement de variable $X = \ln(u_n)$.
  Si $n \to +\infty$ alors $X \to +\infty$.
  On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln(u_n))}{\ln(u_n)} \ = \ \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} \ = \ 0$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(u_n)} \ = \ 1 \text{ et ainsi } \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$$

$$\boxed{\text{Enfin, comme } u_n \ \ln(u_n) \ = \ n \text{ alors } u_n \ = \ \frac{n}{\ln(u_n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}}$$

□

6. Dans cette question, on ne s'intéresse plus qu'à la fonction f_1 définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_1(x) = \begin{cases} x \ \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On définit par ailleurs une suite (v_n) par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.

a. Déterminer le signe de $f_1(x)-x$ sur $[0,+\infty[$ et les éventuelles solutions dans $[0,+\infty[$ de l'équation $f_1(x)=x$.

Démonstration.
- Si $x=0$, $f_1(x)-x \ = \ 0-0 \ = \ 0$.
- Si $x>0$, $f_1(x)-x \ = \ x\ \mathrm{e}^{-1/x}-x \ = \ x\ (\mathrm{e}^{-1/x}-1)<0$ car $\mathrm{e}^{-1/x}<1$.

$$\boxed{\text{Ainsi } f_1(x)-x \leqslant 0 \text{ et l'équation } f_1(x)=x \text{ admet } 0 \text{ comme unique solution sur } [0,+\infty[.}$$
□

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0,1]$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in [0,1]$.

1) **Initialisation** :
$v_0 = 0 \in [0,1]$ donc $\mathcal{P}(0)$.

2) **Hérédité** :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $v_{n+1} \in [0,1]$).
Par hypothèse de récurrence, on a : $0 \leqslant v_n \leqslant 1$.
La fonction f_1 étant croissante, on en déduit :

$$\begin{array}{ccccccc} f_1(0) & \leqslant & f_1(v_n) & \leqslant & f_1(1) & & \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \\ 0 & & v_{n+1} & & \mathrm{e}^{-1} & \leqslant & 1 \end{array}$$

D'où : $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant 1$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in [0,1].}$$
□

c. Étudier la monotonie de la suite (v_n).

Démonstration.
D'après la question ***6.a.*** : $v_{n+1}-v_n \ = \ f_1(v_n)-v_n \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} \leqslant v_n \text{ et la suite } (v_n) \text{ est décroissante.}}$$
□

d. En déduire que (v_n) converge et préciser sa limite.

Démonstration.
- D'après les quesitons précédentes, la suite (v_n) est décroissante et minorée.
  Elle converge donc vers une limite $\ell \in [0,1]$.
- Or comme f_1 est continue sur $[0,+\infty[$, on a :

$$\begin{array}{ccc} v_{n+1} & = & f_1(v_n) \\ {\scriptstyle n \to +\infty}\downarrow & & {\scriptstyle n \to +\infty}\downarrow \\ \ell & = & f_1(\ell) \end{array}$$

On en déduit que ℓ est un point fixe de f_1.

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ converge vers } 0, \text{ unique point fixe de la fonction } f_1.}$$
□

7. Écrire une fonction **Scilab** qui prend un entier n et qui calcule v_n.

Démonstration.

```
function y = f1(x)
    if x == 0 then
        y = 0
    else
        y = x * exp(-1/x)
    end
endfunction
```

```
function v = calculSuite(n)
    v = 1
    for i = 1 : n
        v = f1(v)
    end
endfunction
```

Remarque

Dans ce code, on réalise un appel à la fonction `f`. Il faut aussi savoir coder la fonction `calculSuite` lorsque l'on ne demande pas au préalable de coder la fonction `f1`.

```
function v = calculSuite(n)
    v = 1
    for i = 1 : n
        if v <> 0 then
            v = v * exp(-1/v)
        end
    end
endfunction
```

□