Devoir surveillé n° 7

Lundi 2 mai

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \int_0^1 (\ln(1+t))^n \ dt$$

1. Démontrer que $u_1 = \displaystyle\int_1^2 \ln(x)\ dx$ puis calculer u_1 à l'aide d'une intégration par parties.

Démonstration.

- On effectue le changement de variable $\boxed{x = 1+t}$

$$\left|\begin{array}{l} x = 1+t \\ \hookrightarrow dx = dt \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ x = 1+0 = 1 \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ x = 1+1 = 2 \end{array}\right.$$

  Ainsi : $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t)\ dt \ = \ \int_1^2 \ln(x)\ dx$.

- On calcule alors $u_1 = \displaystyle\int_1^2 \ln(x)\ dx$ par intégration par parties.

$$\left|\begin{array}{ll} u = \ln(x) & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}\right.$$

  Ainsi, on a :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_1^2 \ln(x)\ dx & = & [\ x\ \ln(x)\ ]_1^2 - \displaystyle\int_1^2 1\ dx \\ & = & (2\ \ln(2) - 1\ \cancel{\ln(1)}) - (2-1) \ = \ 2\ \ln(2) - 1 \end{array}$$

$\square$

2. On considère la fonction $f : t \mapsto \ln(1+t)$.
Préciser l'ensemble de définition de f, démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle. Préciser la convexité de f.
Enfin, tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (on donne : $\ln(2) \simeq 0{,}7$).

Démonstration.

- La quantité $f(t) = \ln(1+t)$ est définie si $1+t>0$ *i.e.* si $t>-1$. Ainsi, $\mathscr{D}_f = \,]-1,+\infty[$.
- La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ car c'est la composée de :
  - × $g : t \mapsto t+1$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$. De plus, $g(\,]-1,+\infty[\,) \subset \,]0,+\infty[$.
  - × $h : t \mapsto \ln(t)$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
- Soit $t \in \,]-1,+\infty[$. On a : $f'(t) = \dfrac{1}{t+1}$. Comme $t>-1$, $1+t>0$ et donc $f'(t)>0$.
  On en déduit le tableau de variations de f.

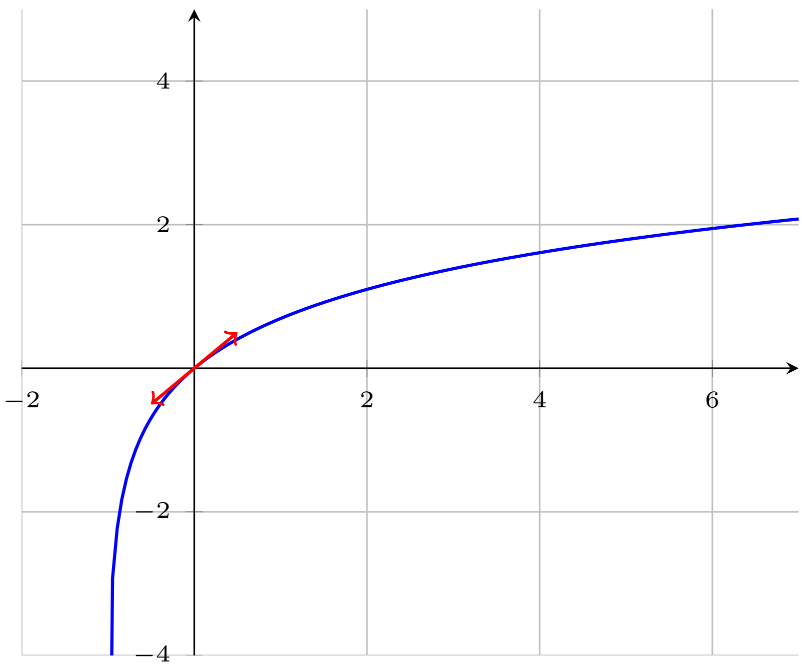
t	-1	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	‖	$+$
Variations de f	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

- Soit $t \in \,]-1,+\infty[$. On a $f''(t) = \dfrac{-1}{(t+1)^2} < 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } f \text{ est concave sur }]-1,+\infty[.}$$

- La fonction f admet pour tangente en 0 la droite d'équation :

$$y = f(0) + f'(0)\, x \quad \text{autrement dit} \quad y = x$$

- 

□

3. ***a.*** Justifier pour tout réel t de $[0,1]$ l'encadrement suivant : $0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant \ln(2)$.

Démonstration.
D'après la question précédente, la fonction f est croissante.

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } t \in [0,1],\ \ 0 = f(0) \leqslant f(t) \leqslant f(1) = \ln(2).}$$

□

b. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction élévation à la puissance n est croissante sur $[0, +\infty[$.
  On déduit donc de la question précédente que :

$$0^n \ \leqslant \ (\ln(1+t))^n \ \leqslant \ (\ln(2))^n$$

- En intégrant sur $[0,1]$ $(1 \geqslant 0)$, on obtient alors :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_0^1 0 \, dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 (\ln(1+t))^n \, dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 (\ln(2))^n \, dt \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & & u_n & & (\ln(2))^n \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a donc bien : } 0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n}$$

□

c. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite 0.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente : $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n$.
- D'autre part :
  × $0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$,
  × $(\ln(2))^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $|\ln(2)| < 1$.

$$\boxed{\text{Par le théorème d'encadrement, la suite } (u_n) \text{ est convergente de limite 0.}}$$

□

4. ***a.*** À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier naturel n la relation suivante :

$$u_{n+1} \ = \ 2\ (\ln(2))^{n+1} - (n+1)\ u_n$$

(on pourra remarquer qu'une primitive de la fonction $t \mapsto 1$ est $t \mapsto 1+t$)

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule $\displaystyle\int_0^1 (\ln(1+t))^{n+1} \, dt$ par intégration par parties.

$$\left| \begin{array}{ll} u = (\ln(1+t))^{n+1} & u' = (n+1)\ (\ln(1+t))^n \ \dfrac{1}{1+t} \\[2ex] v' = 1 & v = 1+t \end{array} \right.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\ln(1+t))^{n+1}\,dt &= \Big[\,(1+t)\,(\ln(1+t))^{n+1}\,\Big]_0^1 - \int_0^1 (n+1)\,(\ln(1+t))^n\,dt \\
&= (2\,(\ln(2))^{n+1} - 1\,(\cancel{\ln(1)})^{n+1}) - (n+1)\int_0^1 (\ln(1+t))^n\,dt \\
&= 2\,(\ln(2))^{n+1} - (n+1)\int_0^1 (\ln(1+t))^n\,dt
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } u_{n+1} \;=\; 2\,(\ln(2))^{n+1} - (n+1)\,u_n.}$$

$\square$

b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$(n+1)\,u_n \;\leqslant\; 2\,(\ln(2))^{n+1}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On a démontré en ***3.b.*** que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$. Ainsi $u_{n+1} \geqslant 0$ et $-u_{n+1} \leqslant 0$.
- On en déduit, à l'aide de la question précédente que :

$$(n+1)\,u_n \;=\; 2\,(\ln(2))^{n+1} - u_{n+1} \;\leqslant\; 2\,(\ln(2))^{n+1}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ (n+1)\,u_n \;\leqslant\; 2\,(\ln(2))^{n+1}}$$

$\square$

c. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 (\ln(1+t))^{n+1}\,dt - \int_0^1 (\ln(1+t))^n\,dt \\
&= \int_0^1 \left((\ln(1+t))^{n+1} - (\ln(1+t))^n\right)dt
\end{aligned}$$

- Or, pour tout $t \in [0,1]$: $\ln(1+t) \;\leqslant\; \ln(2) \;\leqslant\; 1$.
- D'autre part, pour $t \geqslant 0$: $(\ln(1+t))^n \geqslant 0$.
- En multipliant l'inégalité précédente par $(\ln(1+t))^n$, on obtient :

$$(\ln(1+t))^{n+1} \leqslant (\ln(1+t))^n$$

  Et ainsi : $(\ln(1+t))^{n+1} - (\ln(1+t))^n \;\leqslant\; 0$.

On obtient, en intégrant de part et d'autre sur $[0,1]$ $(1 \geqslant 0)$ que :

$$\int_0^1 \left((\ln(1+t))^{n+1} - (\ln(1+t))^n\right)dt \;\leqslant\; \int_0^1 0\,dt \;=\; 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n. \text{ La suite } (u_n) \text{ est donc décroissante.}}$$

$\square$

d. En utilisant la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$(n+2)\ u_n \ \geqslant\ 2\ (\ln(2))^{n+1}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La suite (u_n) étant décroissante, $u_{n+1} \leqslant u_n$ et ainsi $-u_{n+1} \geqslant -u_n$.
- On en déduit, d'après la question ***4.a.*** :

$$(n+1)\ u_n \ =\ 2\ (\ln(2))^{n+1} - u_{n+1} \ \geqslant\ 2\ (\ln(2))^{n+1} - u_n$$

$\boxed{\text{Comme } (n+1)\ u_n \ \geqslant\ (\ln(2))^{n+1} - u_n\text{, on obtient, par ajout de } u_n : (n+2)\ u_n \ \geqslant\ (\ln(2))^{n+1}}$ □

e. Démontrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\ (\ln(2))^{n+1}}{n}$.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer que : $\dfrac{u_n}{\frac{2\ (\ln(2))^{n+1}}{n}} \ =\ \dfrac{n\ u_n}{2\ (\ln(2))^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

- D'après la question ***4.b.***, on a : $u_n \ \leqslant\ 2\ (\ln(2))^{n+1}\ \dfrac{1}{n+1}$.

  En multipliant par $\dfrac{n}{2\ (\ln(2))^{n+1}} \geqslant 0$, on obtient :

$$\frac{n\ u_n}{2\ (\ln(2))^{n+1}} \ \leqslant\ \frac{2\ (\ln(2))^{n+1}}{2\ (\ln(2))^{n+1}}\ \frac{n}{n+1} \ =\ \frac{n}{n+1}$$

- D'après la question ***4.d.***, on a : $u_n \ \geqslant\ 2\ (\ln(2))^{n+1}\ \dfrac{1}{n+2}$.

  En multipliant par $\dfrac{n}{2\ (\ln(2))^{n+1}} \geqslant 0$, on obtient :

$$\frac{n\ u_n}{2\ (\ln(2))^{n+1}} \ \geqslant\ \frac{2\ (\ln(2))^{n+1}}{2\ (\ln(2))^{n+1}}\ \frac{n}{n+2} \ =\ \frac{n}{n+2}$$

En combinant ces deux résultats : $\dfrac{n}{n+2} \ \leqslant\ \dfrac{n\ u_n}{2\ (\ln(2))^{n+1}} \ \leqslant\ \dfrac{n}{n+1}$. Or :

× $\dfrac{n}{n+2} \ =\ \dfrac{n}{n}\ \dfrac{1}{1+\frac{2}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

× $\dfrac{n}{n+1} \ =\ \dfrac{n}{n}\ \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

Par le théorème d'encadrement, la suite $\left(\dfrac{n\ u_n}{2\ (\ln(2))^{n+1}}\right)$ est convergente de limite 1.

$\boxed{\text{On en déduit que : } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\ (\ln(2))^{n+1}}{n}.}$ □

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$.

1. a. Démontrer que f est paire sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) \;=\; \frac{e^{-x}}{e^{-2x}+1} \;=\; \frac{e^{2x}}{e^{2x}}\,\frac{e^{-x}}{e^{-2x}+1} \;=\; \frac{e^{x}}{1+e^{2x}} \;=\; f(x)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction est paire sur } \mathbb{R}.}$$

□

b. Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et étudier ses variations.

Démonstration.

- La fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car est le quotient de :
  - × la fonction $x \mapsto e^x$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
  - × la fonction $x \mapsto e^{2x}+1$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et **qui ne s'annule pas sur** $\mathbb{R}$.

  (en fait, on peut démontrer par une argumentation similaire que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$)
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) \;=\; \frac{e^x\ (e^{2x}+1) - e^x\ (2\ e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} \;=\; \frac{e^{3x}+e^x-2\ e^{3x}}{(e^{2x}+1)^2} \;=\; \frac{e^x - e^{3x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

  Comme $(e^{2x}+1)^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $e^x - e^{3x}$.
- Si $x > 0$, $3x > x$ et donc $e^{3x} > e^x$ par stricte croissance de la fonction exponentielle. Dans ce cas, $f'(x) < 0$. L'autre cas se déduit par parité de la fonction f.
- On en déduit le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

Détaillons les différents éléments de ce tableau :

× $f(0) \;=\; \dfrac{e^0}{e^0+1} \;=\; \dfrac{1}{1+1} \;=\; \dfrac{1}{2}$,

× $\dfrac{e^x}{e^{2x}+1} \;=\; \dfrac{e^x}{e^{2x}}\,\dfrac{1}{1+\frac{1}{e^{2x}}} \;=\; \dfrac{1}{e^x}\,\dfrac{1}{1+\frac{1}{e^{2x}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

□

c. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\ell \in \mathbb{R}^+$.

Démonstration.
Notons $g : x \mapsto f(x) - x$. La fonction g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On procède par disjonction de cas :

- Si $x < 0$: comme $f(x) > 0$, l'équation $f(x) = x$ n'admet pas de solution.
- Si $x \geqslant 0$: tout d'abord, $g'(x) = f'(x) - 1$. Or $f'(x) \leqslant 0$ donc $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ et la fonction g est strictement décroissante.

  La fonction g est :

  × continue sur $\mathbb{R}^+$,

  × strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

  Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $g(\mathbb{R}^+) =] \lim\limits_{x\to+\infty} g(x), g(0)] =]-\infty, \dfrac{1}{2}]$.
  En effet :

  × $g(0) = f(0) - 0 = \dfrac{1}{2}$.

  × Comme $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient : $g(x) = f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

  Enfin, comme $0 \in]-\infty, \dfrac{1}{2}]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\ell \in \mathbb{R}^+$.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'équation } f(x) = x \text{ admet une unique solution } \ell \in \mathbb{R}^+.}$$

□

d. Justifier que : $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Données numériques : $e^{1/2} \simeq 1{,}65$ et $e \simeq 2{,}72$ au centième près.

Démonstration.
Tout d'abord, remarquons que :

× $g(0) = f(0) - 0 = \dfrac{1}{2} \geqslant 0$,

× $g(\ell) = f(\ell) - \ell = 0$,

× $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{e^1 + 1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2\, e^{\frac{1}{2}} - e - 1}{2\,(e + 1)} \leqslant 0$.

  En effet : $2\, e^{\frac{1}{2}} - e - 1 \simeq 2 \times 1{,}65 - 2{,}72 - 1 = 3{,}3 - 3{,}72 = -0{,}42 \leqslant 0$
  (les valeurs étant données au centième près, l'approximation obtenue est exacte au moins au dixième près)

On obtient donc : $g(0) \geqslant g(\ell) \geqslant g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Ces trois éléments sont dans l'ensemble $]-\infty, \dfrac{1}{2}]$.

$$\boxed{\text{En appliquant } g^{-1} :]-\infty, \tfrac{1}{2}] \to \mathbb{R}^+ \text{ de part et d'autre de l'inégalité, on obtient : } 0 \leqslant \ell \leqslant \tfrac{1}{2}.}$$

On pouvait aussi tout simplement remarquer que, d'après la question précédente :

- $\ell \in \mathbb{R}^+$
- $\ell = f(\ell)$

Donc $\ell \in f(\mathbb{R}^+)$. *Or* $f(\mathbb{R}^+) =]0, \frac{1}{2}]$. *Ainsi* $\ell \in]0, \frac{1}{2}]$. □

e. Montrer que : $\forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \leqslant f(x)$. En déduire que : $\forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Démonstration.
Soit $x \geqslant 0$.

- D'après la question ***1.b.*** :

$$f'(x) \ = \ \frac{e^x - e^{3x}}{1 + e^{2x}} \ \leqslant \ 0$$

Donc : $|f'(x)| \ = \ -f'(x) \ = \ \dfrac{e^{3x} - e^x}{1 + e^{2x}}$. Et ainsi :

$$\begin{aligned} |f'(x)| - f(x) \ &= \ \frac{e^{3x} - e^x}{(e^{2x}+1)^2} - \frac{e^x}{e^{2x}+1} \ = \ \frac{e^{3x} - e^x - e^x \times (e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^2} \\ &= \ \frac{\cancel{e^{3x}} - e^x - \cancel{e^{3x}} - e^x}{(e^{2x}+1)^2} \ = \ \frac{-2\ e^x}{(e^{2x}+1)^2} \ \leqslant \ 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \quad \forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \ \leqslant \ f(x).}$$

- Or, l'étude de la fonction f démontre qu'elle atteint son maximum en 0.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \quad \forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \leqslant f(x) \leqslant f(0) = \frac{1}{2}.}$$

□

f. Vérifier que $f\left(\left[0, \dfrac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Démonstration.
La fonction f est continue et décroissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. On en déduit que :

$$f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \ = \ \left[f\left(\frac{1}{2}\right), f(0)\right] \ = \ \left[\frac{e^{\frac{1}{2}}}{e+1}, \frac{1}{2}\right] \ \subset \ \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$\boxed{\text{L'intervalle } \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ est stable par } f.}$$

□

2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_0 = 0 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) \qquad$ où $\quad \mathcal{P}(n) : u_n \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

1) **Initialisation** :
$u_0 = 0 \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

2) **Hérédité** :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$).
Par définition, $u_{n+1} = f(u_n)$. Or :

× par hypothèse de récurrence, on sait : $u_n \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

× l'intervalle $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ est stable par f.

On obtient donc : $u_{n+1} = f(u_n) \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[0,\frac{1}{2}\right].}$$

□

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell| \qquad \text{puis que} \qquad |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$

Démonstration.

- D'après les questions précédentes :
  × f est dérivable sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$,
  × $\forall x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
  On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis que :
  $$\forall (x,y) \in \left[0,\frac{1}{2}\right]^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\ |y - x|$$
  Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$ et $x = \ell \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$, on obtient :
  $$|f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \frac{1}{2}\ |u_n - \ell|$$
  $$\boxed{\text{Et ainsi : } |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}\ |u_n - \ell|.}$$
- Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$.
  1) **Initialisation** :
  $|u_0 - \ell| \leqslant \frac{1}{2}$ car u_0 et ℓ sont des éléments de $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.
  Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.
  2) **Hérédité** :
  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+2}}$).
  D'après le résultat précédent : $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}\ |u_n - \ell|$.
  Or, par hypothèse de récurrence : $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$.
  En combinant ces deux résultats, on obtient : $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}\ |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2}\ \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}$.
  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}.}$$

□

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question précédente : $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
- Or : $\dfrac{1}{2^{n+1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc, d'après le théorème d'encadrement, $|u_n - \ell| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui équivaut à $u_n - \ell \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ est convergente et de limite } \ell.}$$

□

3. **Informatique**

a. Écrire une fonction **Scilab** `f` qui prend en entrée un réel x et qui calcule $f(x)$.

Démonstration.

```
function y = f(x)
    y = exp(x) / (exp(2 ⋆ x) + 1)
endfunction
```

□

b. En utilisant la fonction `f` précédente, écrire une fonction `SuiteU` qui prend en entrée un entier positif n et qui calcule u_n.

Démonstration.

```
function v = SuiteU(n)
    v = 0
    for i = 1 : n
        v = f(v)
    end
endfunction
```

Remarque
Dans ce code, on réalise un appel à la fonction `f`. Il faut aussi savoir coder la fonction `SuiteU` lorsque l'on ne demande pas au préalable de coder la fonction `f`.

```
function v = SuiteU(n)
    v = 0
    for i = 1 : n
        v = exp(v) / (exp(2 ⋆ v) + 1)
    end
endfunction
```

□

c. En utilisant la fonction `SuiteU` précédente, comment peut-on obtenir à l'aide de **Scilab** une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près ?

Démonstration.
D'après la question ***2.b.***, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{1}{2^{n+1}} \leqslant 10^{-6}$, on obtiendra par transitivité : $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-6}$. Or :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant 10^{-6} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{n+1} \ \geqslant \ 10^6 \ &\Leftrightarrow \ (n+1)\ \ln(2) \ \geqslant \ 6\ \ln(10) \\
&\Leftrightarrow \ n+1 \ \geqslant \ \frac{6\ \ln(10)}{\ln(2)} \\
&\Leftrightarrow \ n \ \geqslant \ \frac{6\ \ln(10)}{\ln(2)} - 1
\end{aligned}$$

Pour $N = \left\lceil \dfrac{6\ \ln(10)}{\ln(2)} - 1 \right\rceil$ (et les entiers plus grands) on est donc assuré que $|u_N - \ell| \leqslant 10^{-6}$ ce qui signifie que u_N est une approximation de ℓ à 10^{-6} près.
Il suffit alors d'appeler la fonction `SuiteU` avec pour paramètre `N`.

```
N = ceil(6 * log(10) / log(2) - 1)
u = SuiteU(N)
```

□

Problème A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et (u_n) la suite de nombres réels déterminée par :

$$\begin{cases} & u_0 = \int_0^1 f(x)\, dx \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, & u_n = \int_0^1 x^n f(x)\, dx \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f, relativement à un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Étude de f

1. Montrer que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{1+(-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f(x)$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc paire sur } \mathbb{R}.}$$

□

2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car est la composée de :
  - × $g : x \mapsto 1 + x^2$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et telle que $g(\mathbb{R}) \subset]0, +\infty[$.
  - × $h : x \mapsto \sqrt{x}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
- La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ car est l'inverse de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et **qui ne s'annule pas** sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons que $f(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{\cancel{2}} (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \times (\cancel{2}x) = -\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

Comme $1 + x^2 > 0$ et $\sqrt{1+x^2} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-x$.

- On en déduit le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

(on pouvait se limiter à l'étude sur $\mathbb{R}^+$ et obtenir l'autre partie du tableau par parité)
Détaillons les différents éléments de ce tableau :

× $f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{1+0^2}} = \dfrac{1}{1} = 1$,

× $\sqrt{1+x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

□

4. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

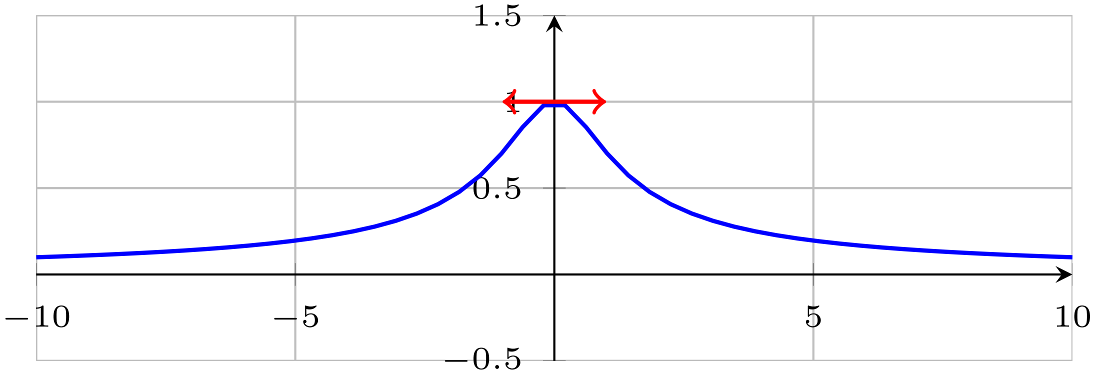
Démonstration.
D'après l'étude précédente, $f(\mathbb{R}) =]0,1]$.

$$\boxed{\text{Autrement dit, pour tout } x \in \mathbb{R},\ \ 0 < f(x) \leqslant 1.}$$

□

5. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$.

Démonstration.



□

6. Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $I = [0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

Démonstration.
La fonction f est :

× continue sur $[0, +\infty[$,

× strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[) =] \lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(0)] =]0,1]$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } J =]0,1].}$$

□

7. Pour tout y de l'intervalle $]0{,}1]$, déterminer l'unique réel x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$ tel que : $f(x) = y$.

Démonstration.
Soit $x \in [0, +\infty[$ et $y \in]0{,}1]$. Il s'agit d'inverser le système $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} f(x) = y \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = y && (1) \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{y} && (2) \\ &\Leftrightarrow \quad 1 + x^2 = \frac{1}{y^2} && (3) \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{y^2} - 1 && (4) \\ &\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} && (5) \end{aligned}$$

- L'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2) est justifiée par le fait que $y \neq 0$.
- Les équivalences (3) $\Leftrightarrow$ (4) et (4) $\Leftrightarrow$ (5) sont justifiées par le caractère positif des quantités considérées *(si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, on a : $a = b \ \Leftrightarrow \ a^2 = b^2$).*

$$\boxed{\text{Ainsi, } x = \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} \text{ est l'unique élément de } [0, +\infty[\text{ tel que } f(x) = y.}$$

□

8. En déduire une expression de $f^{-1} : J \to I$, bijection réciproque de $f : I \to J$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Ainsi, la bijection réciproque de } f : I \to J \text{ est la fonction } f^{-1} : t \mapsto \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}\,.}$$

□

Calcul d'aire

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie par : $F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
Pour tout réel λ strictement positif, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire (exprimée en unité d'aire) du domaine constitué par l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que : $\lambda \leqslant x \leqslant 2\lambda$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.
Ainsi : $\mathcal{A}(\lambda) = \displaystyle\int_{\lambda}^{2\lambda} f(x)\ dx$.

9. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
En déduire l'ensemble de définition de F.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2\ \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{x^2}\ \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = |x|\ \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \ > \ |x|$$

car $\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} \ > \ \sqrt{1} = 1$. Ainsi : $x + \sqrt{x^2+1} > x + |x| = \left\{ \begin{array}{ll} 2\,x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{array} \right.$.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \forall x \in \mathbb{R},\ x + \sqrt{x^2+1} > 0 \text{ et ainsi que } \mathscr{D}_F = \mathbb{R}.}$$

□

10. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ car est la composée de :

× $g : x \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ (*cf* ***2.***) et telle que $g(\mathbb{R}) \subset\ ]0, +\infty[$

× $h : x \mapsto \ln(x)$ dérivable sur $]0, +\infty[$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \left(1 + \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\,(\cancel{2}\,x)\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\,\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\boxed{F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et telle que : } \forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = f(x). \text{ Ainsi, } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

$\square$

11. Montrer que F est impaire sur son ensemble de définition.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F(-x) &= \ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1}) = \ln(-x+\sqrt{x^2+1}) = \ln\left(\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = \cancel{\ln(1)} - \ln(\sqrt{x^2+1}+x) = -F(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } F \text{ est impaire sur } \mathbb{R}.}$$

$\square$

12. Déterminer la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$.
En déduire la limite de F quand x tend vers $-\infty$.

Démonstration.

- Comme $x + \sqrt{x^2+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- La limite en $-\infty$ peut se déduire de la parité de la fonction F :

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} F(-x) = \lim_{x\to+\infty} -F(x) = -\lim_{x\to+\infty} F(x) = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty.}$$

$\square$

13. Exprimer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ et calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Soit $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda) &= \int_{\lambda}^{2\lambda} f(x)\,dx = [\ F(x)\ ]_{\lambda}^{2\lambda} = F(2\lambda) - F(\lambda) \\ &= \ln(2\lambda+\sqrt{(2\lambda)^2+1}) - \ln(\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}) = \ln\left(\frac{2\lambda+\sqrt{(2\lambda)^2+1}}{\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}}\right) \end{aligned}$$

Or : $$\frac{2\lambda+\sqrt{(2\lambda)^2+1}}{\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}} = \frac{2\lambda}{\lambda}\,\frac{1+\sqrt{\frac{(2\lambda)^2}{(2\lambda)^2}+\frac{1}{(2\lambda)^2}}}{1+\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}}} = 2\,\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{4\lambda^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}}$$

- $1+\sqrt{1+\frac{1}{4\lambda^2}} \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 1+\sqrt{1} \ = \ 2$
- $1+\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}} \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 1+\sqrt{1} \ = \ 2$

Donc : $2\,\dfrac{1+\sqrt{1+\frac{1}{4\lambda^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}} \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 2\times\dfrac{2}{2} \ = \ 2.$

$$\boxed{\text{Et } \lim_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda) \ = \ \ln(2).}$$

□

Étude de la suite (u_n).

14. Calculer u_0 et u_1.

Démonstration.

- $u_0 \ = \ \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \ = \ \big[\,F(x)\,\big]_0^1 \ = \ F(1)-F(0) \ = \ \ln(1+\sqrt{2}) - \cancel{\ln(\sqrt{1})} \ = \ \ln(1+\sqrt{2})$
- $u_1 \ = \ \displaystyle\int_0^1 x\ f(x)\,dx \ = \ \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \ = \ \frac{1}{2}\int_0^1 (2x)\times(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx \ = \ \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\left[\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}}\right]_0^1$

$$= \ \left[\,\sqrt{1+x^2}\,\right]_0^1 \ = \ \sqrt{2}-\sqrt{1} \ = \ \sqrt{2}-1$$

$$\boxed{u_0 \ = \ \ln(1+\sqrt{2}) \quad \text{et} \quad u_1 \ = \ \sqrt{2}-1}$$

□

15. Effectuer une intégration par parties et calculer u_3.

Démonstration.

Calculons $u_3 \ = \ \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ par intégration par parties.

$$\left|\begin{array}{ll} u = \dfrac{x^2}{2} & u' = x \\[2ex] v' = \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}} & v = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\frac{1}{2}} \end{array}\right.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \ &= \ \left[\,x^2\ \sqrt{1+x^2}\,\right]_0^1 - 2\int_0^1 x\ \sqrt{1+x^2}\,dx \\
&= \ \sqrt{2} - \int_0^1 (2x)\ (1+x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx \ = \ \sqrt{2} - \left[\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\
&= \ \sqrt{2} - \frac{2}{3}\left[\,(1+x^2)\ \sqrt{1+x^2}\,\right]_0^1 \ = \ \sqrt{2}-\frac{2}{3}\,(2\ \sqrt{2}-\sqrt{1}) \\
&= \ \left(1-\frac{4}{3}\right)\ \sqrt{2}+\frac{2}{3} \ = \ \frac{2-\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{u_3 \ = \ \frac{2-\sqrt{2}}{3}}$$

□

16. Déterminer le sens de variations de la suite (u_n).

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n \ = \ \int_0^1 x^{n+1} \ f(x) \ dx - \int_0^1 x^n \ f(x) \ dx \ = \ \int_0^1 x^n \ (x-1) \ f(x) \ dx$$

Or pour tout $x \in [0,1]$: $x^n \geqslant 0$, $x - 1 \leqslant 0$ et $f(x) > 0$. On en déduit que : $x^n \ (x-1) \ f(x) \leqslant 0$.
Enfin, en intégrant sur $[0,1]$ $(1 \geqslant 0)$, on obtient : $\displaystyle\int_0^1 x^n \ (x-1) \ f(x) \ dx \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{D'où } u_{n+1} \leqslant u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et donc } (u_n) \text{ est décroissante.}}$$

□

17. Montrer que la suite (u_n) est convergente *(on ne cherchera pas sa limite dans cette question).*

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0,1]$, $x^n \geqslant 0$ et $f(x) > 0$. Ainsi, $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x) \ dx \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente.}}$$

□

18. Justifier l'encadrement suivant : $\forall x \in [0,1]\,, \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^n$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Démonstration.
Soit $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

- $x^n \geqslant 0$,
- $1 + x^2 \geqslant 1$ donc $\sqrt{1+x^2} \geqslant \sqrt{1} = 1$. Ainsi $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant 1$ et $0 \leqslant \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^n$.

$$\boxed{\forall x \in [0,1]\,, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^n}$$

En intégrant sur $[0,1]$ $(1 \geqslant 0)$, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_0^1 0 \ dx & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \ dx & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 x^n \ dx \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & & u_n & & \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \ = \ \dfrac{1}{n+1} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}}$$

□

19. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

Démonstration.

× $0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$,

× $\dfrac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par le théorème d'encadrement, la suite } (u_n) \text{ est convergente, de limite 0.}}$$

□

Problème B

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout réel t, par :

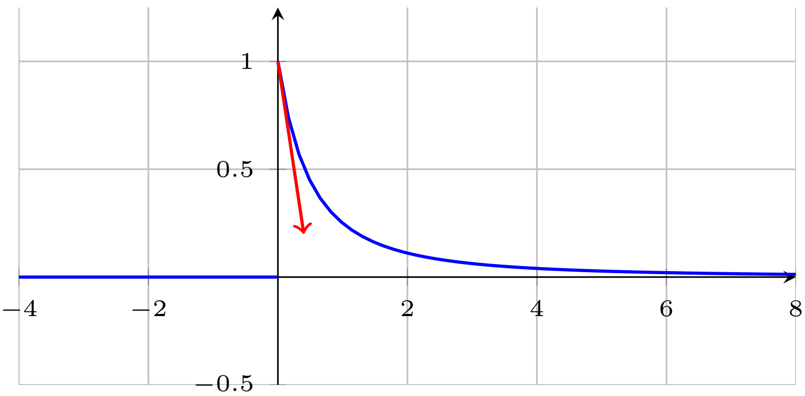
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(1+t)^2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

1. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Démonstration.
Sur $]-\infty,0]$, la fonction f est constante.

Sur $]0,+\infty[$, la fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ car est l'inverse de la fonction $t \mapsto (1+t)^2$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$ (car polynomiale) **et qui ne s'annule pas sur cet intervalle**.

- Soit $t > 0$. $f'(t) \ = \ ((1+t)^{-2})' \ = \ -2\ (1+t^2)^{-3} \ = \ -\dfrac{2}{(1+t)^3}$.
- Comme $1+t > 0$, $(1+t)^3 > 0$ et $f'(t) < 0$ sur $]0,+\infty[$.
  La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.
- $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) \ = \ 1$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) \ = \ 0$.
- Enfin, comme et $f'_d(0) = -2$, la fonction f a pour demi-tangente à droite en 0 la droite d'équation $y = 1 - 2x$.



□

2. Pour x dans $\mathbb{R}$, on note $g(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$.

a. Quelle est la parité de g ?

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$g(-x) \ = \ \int_{x}^{-x} f(t)\ dt \ = \ -\int_{-x}^{x} f(t)\ dt \ = \ -g(x)$$

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est impaire.}}$$

□

b. Calculer explicitement $g(x)$. On pourra distinguer les cas $x \geqslant 0$ et $x < 0$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \geqslant 0$:
La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Par définition :
$$g(x) \ = \ \int_{-x}^{x} f(t)\ dt \ = \ \int_{-x}^{0} f(t)\ dt + \int_{0}^{x} \tilde{f}(t)\ dt$$
où $\tilde{f}$ est la fonction $f_{|]0,+\infty[}$ qui a été prolongée par continuité en 0.
Plus précisément :
  × pour tout $t \in [-x,0]$, $f(t) = 0$,
  × pour tout $t \in [0,x]$, $\tilde{f}(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2} = (1+t)^{-2}$.
$$\begin{aligned} g(x) \ &= \ \int_{-x}^{0} f(t)\ dt + \int_{0}^{x} f(t)\ dt \ = \ \int_{-x}^{0} 0\ dt + \int_{0}^{x} (1+t)^{-2}\ dt \ = \ \left[\ \frac{(1+t)^{-1}}{-1} \ \right]_0^x \\ &= \ - \left[\ \frac{1}{1+t} \ \right]_0^x \ = \ - \left(\frac{1}{1+x} - 1 \right) \ = \ - \left(\frac{\cancel{1} - \cancel{1} - x}{1+x} \right) \ = \ \frac{x}{1+x} \end{aligned}$$

- Si $x < 0$:
Alors $-x > 0$. On en déduit, par parité :
$$g(x) \ = \ -g(-x) \ = \ - \left(\frac{-x}{1-x} \right) \ = \ \frac{x}{1-x}$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} g \ : \ \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{x}{1+x} & \text{si } x \geqslant 0 \\[2ex] \dfrac{x}{1-x} & \text{si } x < 0 \end{array} \right. \end{array}}$$

□

c. Quel est le plus grand entier n tel que g soit de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$?

Démonstration.

- La fonction g est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.
En effet :
  × $x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$ est $\mathcal{C}^0$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $]-\infty,0[$ car est un quotient de deux fonctions polynomiales **dont le dénominateur ne s'annule pas**,
  × de même, $x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ est $\mathcal{C}^0$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $]0,+\infty[$,
  × $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) \ = \ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1-x} \ = \ 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) \ = \ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1+x} \ = \ 0$ et $g(0) = 0$.
- La fonction g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Tout d'abord, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ car :
  × elle est dérivable sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ d'après ce qui précède,
  × si $x < 0$, on a : $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} \ = \ \dfrac{\frac{x}{1-x}}{x} \ = \ \dfrac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1 = g'_g(0)$,
  × si $x > 0$, on a : $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} \ = \ \dfrac{\frac{x}{1+x}}{x} \ = \ \dfrac{1}{1+x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1 = g'_d(0)$,

Déterminons la dérivée de g :

× si $x < 0$, $\quad g'(x) \ = \ \dfrac{(1-x) - x\,(-1)}{(1-x)^2} \ = \ \dfrac{1}{(1-x)^2}$

× si $x > 0$, $\quad g'(x) \ = \ \dfrac{(1+x) - x}{(1+x)^2} \ = \ \dfrac{1}{(1+x)^2}$

× $g'(0) \ = \ 1$ par ce qui précède.

Comme $\lim\limits_{x \to 0^-} g'(x) \ = \ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{(1-x)^2} \ = \ 1 \ = \ g'(0) \ = \ 1 \ = \ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{(1-x)^2} \ = \ \lim\limits_{x \to 0^+} g'(x)$, la fonction g' est continue en 0 et donc continue sur $\mathbb{R}$ d'après ce qui précède.

- La fonction g n'est pas $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. En effet :

× si $x < 0$, on a :

$$\frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} \ = \ \frac{\frac{1}{(1-x)^2} - 1}{x} \ = \ \frac{1 - (1-x)^2}{x(1-x)^2} \ = \ \frac{2x - x^2}{x(1-x)^2} \ = \ \frac{2 - x}{(1-x)^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 2 = g''_g(0)$$

× si $x > 0$, on a :

$$\frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} \ = \ \frac{\frac{1}{(1+x)^2} - 1}{x} \ = \ \frac{1 - (1+x)^2}{x(1+x)^2} \ = \ \frac{-2x - x^2}{x(1+x)^2} \ = \ \frac{-2 - x}{(1-x)^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -2 = g''_d(0)$$

Ainsi, g' n'est pas dérivable en 0.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ mais pas } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

□

d. Montrer que $g(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Soit $x > 0$.

$$g(x) \ = \ \frac{x}{1+x} \ = \ \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \, \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x \to +\infty} g(x) \ = \ 1.}$$

□

3. Déterminer un réel positif α tel que $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)\,dt = \frac{1}{2}$.

Démonstration.
Soit $\alpha \geqslant 0$.

$$\int_0^{\alpha} f(t)\ dt \ = \ \int_0^{\alpha} \frac{1}{(1+t)^2}\ dt \ = \ -\left[\ \frac{1}{1+t}\ \right]_0^{\alpha} \ = \ -\left(\frac{1}{1+\alpha} - 1\right) \ = \ \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

$$\boxed{\text{Pour } \alpha = 1, \text{ on a } \int_0^{\alpha} f(t)\ dt \ = \ \frac{1}{2}.}$$

□

4. Soit $x \in [0, +\infty[$ fixé.

On considère la fonction φ_x définie sur $[0, +\infty[$ par : $\forall u \in [0, +\infty[, \ \varphi_x(u) = \displaystyle\int_{x-u}^{x+u} f(t)\, dt$.

a. Calculer $\varphi_x(0)$ et $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \varphi_x(u)$.

Démonstration.
Soit $x \in [0, +\infty[$.

- $\varphi_x(0) \ = \ \displaystyle\int_x^x f(t)\ dt \ = \ 0.$
- Soit $u \in [0, +\infty[$ tel que $u \geqslant x$ *(permet d'assurer $x + u \geqslant 0$ et $x - u \leqslant 0$).*

$$\begin{aligned}\varphi_x(u) \ &= \ \int_{x-u}^{x+u} f(t)\ dt \ = \ \int_{x-u}^{0} f(t)\ dt + \int_0^{x+u} f(t)\ dt \ = \ 0 - \left[\ \frac{1}{t+1}\ \right]_0^{x+u} \\ &= \ -\left(\frac{1}{x+u+1} - 1\right) \ = \ 1 - \frac{1}{x+u+1} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - 0 \ = \ 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi_x(0) \ = \ 0 \text{ et } \lim_{u\to+\infty} \varphi_x(u) \ = \ 1.}$$

□

b. Montrer : $\quad \forall (u,v) \in [0, +\infty[^2, \quad u < v \ \Rightarrow \left(\varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geqslant \displaystyle\int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt\right)$.
En déduire que φ_x est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Démonstration.
Soit $(u,v) \in [0, +\infty[^2$, tel que $u < v$.

- Tout d'abord, on a :

$$\varphi_x(v) - \varphi_x(u) \ = \ \int_{x-v}^{x+v} f(t)\ dt - \int_{x-u}^{x+u} f(t)\ dt \ = \ \int_{x+u}^{x-u} f(t)\ dt + \int_{x-v}^{x+v} f(t)\ dt$$

Or, par la relation de Chasles :

$$\int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt \ = \ \int_{x+u}^{x-u} f(t)\ dt + \int_{x-u}^{x-v} f(t)\ dt + \int_{x-v}^{x+v} f(t)\ dt$$

On en déduit que :

$$(\varphi_x(v) - \varphi_x(u)) - \int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt \ = \ -\int_{x-u}^{x-v} f(t)\ dt \ = \ \int_{x-v}^{x-u} f(t)\ dt$$

Enfin, comme $u < v$, on a $-v < -u$ et ainsi $x - v < x - u$.
La fonction f étant positive, $\displaystyle\int_{x-v}^{x-u} f(t)\ dt \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall (u,v) \in [0, +\infty[^2, \quad u < v \ \Rightarrow \left(\varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geqslant \int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt\right).}$$

- Comme $x \geqslant 0$, $u \geqslant 0$ et $v \geqslant 0$, $[x + u, \, x + v] \subset [0, +\infty[$. Or, pour tout $t \in [0, +\infty[, \ \ f(t) > 0$.
On en déduit que $\displaystyle\int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, si } u < v,\ \varphi_x(v) > \varphi_x(u). \text{ La fonction } \varphi_x \text{ est donc strictement croissante.}}$$

□

c. On admet que φ_x est continue sur $[0,+\infty[$. Montrer que l'équation $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$, d'inconnue u, admet une solution et une seule dans $[0,+\infty[$.

Démonstration.
La fonction φ_x est :

× continue sur $[0,+\infty[$,

× strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $[0,+\infty[$ sur $\varphi_x([0,+\infty[) \ = \ [\varphi_x(0), \lim\limits_{u\to+\infty} \varphi_x(u)[\ = \ [0,1[$.

$$\boxed{\text{Comme } \frac{1}{2} \in [0,1[, \text{ on en déduit que l'équation } \varphi_x(u) = \frac{1}{2} \text{ admet une unique solution } u \in [0,+\infty[.}$$

□

On note $U : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application qui, à tout réel $x \in [0,+\infty[$, associe $U(x)$, l'unique solution de l'équation $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)\ dt = \frac{1}{2}$.

5. a. Vérifier, pour tout $x \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right[$: $\quad U(x) = 1 - x$.

Démonstration.
Soit $x \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right[$.

- $1 - x \in \left]\dfrac{1}{2},1\right] \subset [0,+\infty[$.
- Il suffit donc de vérifier que $1-x$ est solution de $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$ *i.e.* que $\varphi_x(1-x) = \dfrac{1}{2}$.
  L'unicité d'une telle solution permettra alors de conclure que $1 - x = U(x)$. Or :

$$\varphi_x(1-x) \ = \ \int_{x-(1-x)}^{x+(1-x)} f(t)\ dt \ = \ \int_{2x-1}^{1} f(t)\ dt \ = \ \int_{2x-1}^{0} f(t)\ dt + \int_{0}^{1} f(t)\ dt$$

Comme $2x - 1 \in [-1,\, 0[$, $\ f(t) = 0$ sur cet intervalle.
On en déduit que : $\displaystyle\int_{2x-1}^{0} f(t)\ dt \ = \ 0$ et ainsi :

$$\varphi_x(1-x) \ = \ \int_0^1 f(t)\ dt \ = \ \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\ dt \ = \ -\left[\ \frac{1}{1+t}\ \right]_0^1 \ = \ -\left(\frac{1}{2} - 1\right) \ = \ \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right[, \quad U(x) = 1 - x.}$$

□

b. Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, montrer : $\varphi_x(x) \geqslant \frac{1}{2}$, puis : $x - U(x) \geqslant 0$.
En déduire : $U(x) = \sqrt{4 + (x+1)^2} - 2$.

Démonstration.
Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\varphi_x(x) &= \int_{x-x}^{x+x} f(t)\ dt = \int_0^{2x} f(t)\ dt = \int_0^{2x} \frac{1}{(1+t)^2}\ dt = -\left[\frac{1}{1+t}\right]_0^{2x} \\
&= -\left(\frac{1}{1+2x} - 1\right) = 1 - \frac{1}{1+2x}
\end{aligned}$$

Comme $x \geqslant \frac{1}{2}$, $2x+1 \geqslant 2 > 0$ et $\frac{1}{2x+1} \leqslant \frac{1}{2}$. D'où : $-\frac{1}{2x+1} \geqslant -\frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Et enfin : } \varphi_x(x) = 1 - \frac{1}{2x+1} \geqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.}$$

- On a démontre : $\varphi_x(x) \geqslant \frac{1}{2} = \varphi_x(U(x))$.
Or, d'après le théorème de la bijection, la fonction φ_x^{-1} : $[0,1[\to [0, +\infty[$ est strictement croissante.

$$\boxed{\text{En appliquant la fonction } \varphi_x^{-1} \text{ de part et d'autre de l'inégaligé, on obtient : } x \geqslant U(x).}$$

- Par définition, $U(x)$ est la solution de l'équation $\varphi_x(u) = \frac{1}{2}$.
Comme $x \geqslant U(x)$, $x - U(x) \geqslant 0$ et $x + U(x) \geqslant 2U(x) \geqslant 0$ par définition.
Ainsi, $[x - U(x), x + U(x)] \subset [0, +\infty[$ et pour tout $t \in [x - U(x), x + U(x)]$, $f(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$.
Et :

$$\begin{aligned}
\varphi_x(U(x)) &= \int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)\ dt = \int_{x-U(x)}^{x+U(x)} \frac{1}{(1+t)^2}\ dt \\
&= -\left[\frac{1}{1+t}\right]_{x-U(x)}^{x+U(x)} = -\left(\frac{1}{(1+x)+U(x)} - \frac{1}{(1+x)-U(x)}\right) \\
&= -\frac{((\cancel{1+x}) - U(x)) - ((\cancel{1+x}) + U(x))}{(1+x)^2 - U(x)^2} = \frac{2\ U(x)}{(1+x)^2 - U(x)^2}
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
\varphi_x(U(x)) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{2\ U(x)}{(1+x)^2 - U(x)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\ U(x) = (1+x)^2 - U(x)^2 \\
&\Leftrightarrow U(x)^2 + 4\ U(x) - (1+x)^2 = 0
\end{aligned}$$

La quantité $U(x)$ est donc la solution positive du polynôme $P(X) = X^2 + 4\ X - (1+x)^2$.
Le discriminant réduit de P est $\Delta' = 2^2 + (1+x)^2$. Ainsi, P admet pour racines :

$$u_1 = -2 + \sqrt{4 + (1+x)^2} \quad \text{et} \quad u_2 = -2 + \sqrt{4 + (1+x)^2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } U(x) = -2 + \sqrt{4 + (1+x)^2}}$$

□

6. a. Montrer que l'application U est continue sur $[0,+\infty[$.

Démonstration.
D'après ce qui précède :

$$U : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1-x & \text{si } x \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right[\\ -2+\sqrt{4+(1+x)^2} & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{2} \end{array} \right. \end{array}$$

- La fonction U est continue sur $[0,\frac{1}{2}[$ car polynomiale sur cet intervalle.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{4+(1+x)^2}$ est continue sur $]\frac{1}{2},+\infty[$ car est la composée de :

  × $g : x \mapsto 4+(1+x^2)$ conitnue sur $]\frac{1}{2},+\infty[$ et telle que $g(\,]\frac{1}{2},+\infty[\,) \subset [0,+\infty[$,

  × $h : x \mapsto \sqrt{x}$ continue sur $[0,+\infty[$.

  Ainsi, U est continue sur $]\frac{1}{2},+\infty[$.
- La fonction U est continue en $\dfrac{1}{2}$. En effet :

  × $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} U(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} 1-x = \dfrac{1}{2}$

  × $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} U(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} -2+\sqrt{4+(1+x)^2} = -2+\sqrt{4+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = -2+\sqrt{\dfrac{25}{4}} = -2+\dfrac{5}{2} = \dfrac{1}{2}$

  × $U\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{La fonction } U \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$$

□

b. Étudier la dérivabilité de U sur $[0,+\infty[$

Démonstration.
En reprenant la démonstration précédente, on prouve aisément que U est dérivable (même $\mathcal{C}^\infty$) sur $[0,\frac{1}{2}[\,\cup\,]\frac{1}{2},+\infty[$ *(il faut noter que $g(]\frac{1}{2},+\infty[) \subset]0,+\infty[$, intervalle sur lequel h est $\mathcal{C}^\infty$).*

- si $x < \frac{1}{2}$: $\dfrac{U(x)-U(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \dfrac{1-x-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}-x}{x-\frac{1}{2}} = -1 \underset{x\to\frac{1}{2}}{\longrightarrow} -1$,
- si $x > \frac{1}{2}$: $\dfrac{U(x)-U(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \dfrac{-2+\sqrt{4+(1+x)^2}-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}} = \dfrac{-\frac{5}{2}+\sqrt{4+(1+x)^2}}{x-\frac{1}{2}}$. Or :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{4+(1+x)^2}-\frac{5}{2}}{x-\frac{1}{2}} &= \frac{\left(\sqrt{4+(1+x)^2}-\frac{5}{2}\right)\left(\sqrt{4+(1+x)^2}+\frac{5}{2}\right)}{(x-\frac{1}{2})\left(\sqrt{4+(1+x)^2}+\frac{5}{2}\right)} \\ &= \frac{4+(1+x)^2-(\frac{5}{2})^2}{(x-\frac{1}{2})\left(\sqrt{4+(1+x)^2}+\frac{5}{2}\right)} \end{aligned}$$

Intéressons-nous en particulier au dénominateur.

$$\begin{aligned} 4+(1+x)^2-\left(\tfrac{5}{2}\right)^2 &= 4-\left(\tfrac{5}{2}\right)^2+(1+x)^2 \\ &= 4-\tfrac{25}{4}+1+2x+x^2 \;=\; -\tfrac{5}{4}+2x+x^2 \;=\; \left(x-\tfrac{1}{2}\right)\left(x+\tfrac{5}{2}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\frac{U(x)-U(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \frac{\cancel{\left(x-\frac{1}{2}\right)}\left(x+\frac{5}{2}\right)}{\cancel{\left(x-\frac{1}{2}\right)}\left(\sqrt{4+(1+x)^2}+\frac{5}{2}\right)} = \frac{x+\frac{5}{2}}{\sqrt{4+(1+x)^2}+\frac{5}{2}} \underset{x\to\frac{1}{2}}{\longrightarrow} \frac{3}{5}$$

$$\boxed{\text{Comme } U_g'(\tfrac{1}{2}) = -1 \;\neq\; \tfrac{3}{5} = U_d'(\tfrac{1}{2}), \text{ la fonction } U \text{ n'est pas dérivable en } \tfrac{1}{2}.}$$

□

c. Tracer l'allure de la courbe représentative de U.

Démonstration.

- Notons $v : x \mapsto -2+\sqrt{4+(1+x)^2}$. Pour $x \geqslant \frac{1}{2}$:

$$v'(x) = \frac{1}{\cancel{2}\,\sqrt{4+(1+x)^2}}\,\cancel{2}\,(1+x) = \frac{1+x}{\sqrt{4+(1+x)^2}} > 0$$

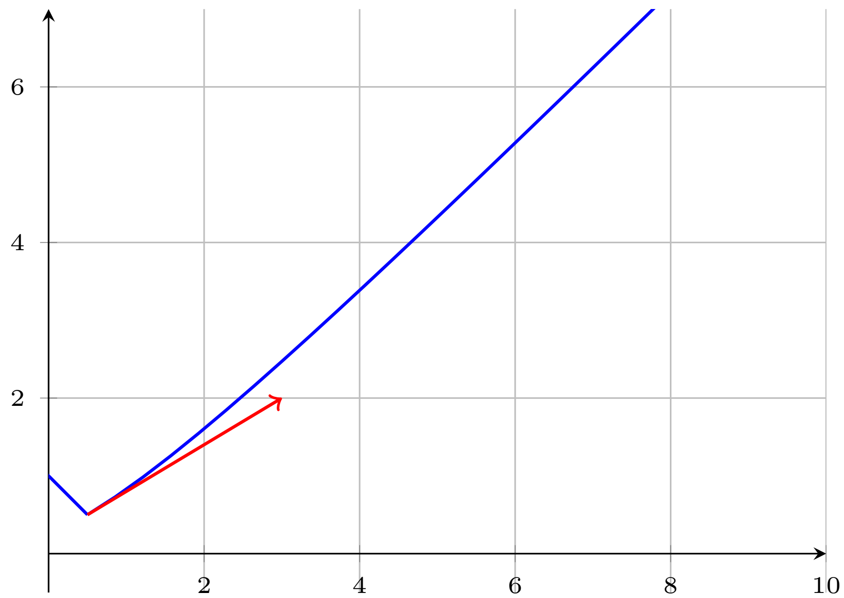
Ainsi, la fonction v est strictement croissante sur $[\frac{1}{2},+\infty[$.

- D'autre part, comme $4+(1+x)^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $\sqrt{4+(1+x)^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} v(x) = +\infty$$

- La courbe représentative de U admet pour demi-tangente à droite, la droite d'équation :

$$y = \frac{3}{5}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$$



□

7. On considère la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\quad a_{n+1} & = & U(a_n) \end{array}\right.$$

a. Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Démonstration.

- On a démontré précédemment que v est strictement croissante.
  Donc, pour tout $x \in [\frac{1}{2}, +\infty[$: $U(x) \geqslant U(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ *(autrement dit* $[\frac{1}{2}, +\infty[$ *est stable par* U*).*
- Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : a_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

1) **Initialisation** :
$a_0 = 1 \geqslant \dfrac{1}{2}$ ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

2) **Hérédité** :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $a_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{2}$).
Par hypothèse de récurrence : $a_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
La fonction U étant croissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$, on obtient :

$$a_{n+1} = U(a_n) \geqslant U\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

□

b. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : a_{n+1} \leqslant a_n$.

1) **Initialisation** :
$a_1 = U(a_0) = U(1) = -2 + \sqrt{4 + (1+1)^2} = -2 + \sqrt{8} \leqslant 1$.
En effet : $-2 + \sqrt{8} \leqslant 1 \Leftrightarrow \sqrt{8} \leqslant 3$.
Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

2) **Hérédité** :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $a_{n++2} \leqslant a_{n+1}$).
Par hypothèse de récurrence : $a_{n+1} \geqslant a_n$.
D'après la question précédente, $a_n \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $a_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{2}$. La fonction U étant croissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$, on obtient :

$$a_{n+2} = U(a_{n+1}) \leqslant U(a_n) = a_{n+1}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \leqslant a_n$. Ainsi, (a_n) est décroissante.

□

c. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et montrer que sa limite est égale à $\dfrac{1}{2}$.

Démonstration.

- La suite (a_n) est décroissante et minorée par $\dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } (a_n) \text{ est convergente et que sa limite } \ell \text{ vérifie } \ell \geqslant \tfrac{1}{2}.}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \ = \ U(a_n)$.
La fonction U étant continue, on en déduit, par théorème de composition :

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & U(a_n) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle n\to+\infty} & & \Big\downarrow {\scriptstyle n\to+\infty} \\ \ell & = & U(\ell) \end{array}$$

Ainsi, ℓ est un point fixe de U.

- Déterminons les points fixes de U.
   - × Si $x \in [0,\frac{1}{2}[$: $U(x) \ = \ 1-x$.

$$U(x) = x \ \Leftrightarrow \ 1-x = x \ \Leftrightarrow \ 2x = 1 \ \Leftrightarrow \ x = \frac{1}{2}$$

   Ainsi, U n'admet pas de point fixe sur $[0,\frac{1}{2}[$.
   - × Si $x \in [\frac{1}{2}, +\infty[$: $U(x) \ = \ -2+\sqrt{4+(1+x)^2}$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} U(x)-x & = & -2+\sqrt{4+(1+x)^2}-x \ = \ \sqrt{4+(1+x)^2}-(2+x) \\[2mm] & = & \dfrac{(\sqrt{4+(1+x)^2}-(2+x))(\sqrt{4+(1+x)^2}+(2+x))}{\sqrt{4+(1+x)^2}+(2+x)} \\[4mm] & = & \dfrac{4+(1+x)^2-(2+x)^2}{\sqrt{4+(1+x)^2}+(2+x)} \ = \ \dfrac{\cancel{4}+1+2x+\cancel{x^2}-\cancel{4}-4x-\cancel{x^2}}{\sqrt{4+(1+x)^2}+(2+x)} \\[4mm] & = & \dfrac{1-2x}{\sqrt{4+(1+x)^2}+(2+x)} \end{array}$$

   Ainsi : $\quad U(x) = x \ \Leftrightarrow \ U(x)-x = 0 \ \Leftrightarrow \ 1-2x = 0 \ \Leftrightarrow \ x = \dfrac{1}{2}$.
   et U admet $\dfrac{1}{2}$ comme unique point fixe sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \ell = \frac{1}{2}, \text{ unique point fixe de } U.}$$

□

d. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left| a_n - \frac{1}{2} \right| \leqslant 10^{-6}$$

Démonstration.

- On commence par coder la fonction U ou plutôt sa restriction à $[\frac{1}{2}, +\infty[$ *i.e.* la fonction v. *(on peut coder U à l'aide d'une conditionnelle mais cela a peu d'intérêt ici puisque l'on sait que tous les éléments de la suite (a_n) sont dans $[\frac{1}{2}, +\infty[$)*

```
function y = v(x)
    y = -2 + sqrt(4 + (1+x)^2)
endfunction
```

- On peut alors déterminer l'entier n de l'énoncé à l'aide du programme suivant.

```
a = 1
n = 0
while abs(a - 1/2) > 10^(-6)
    a = v(a)
    n = n + 1
end
disp(n)
```

Remarque
Dans ce code, on réalise un appel à la fonction v. Il faut aussi savoir coder ce programme lorsque l'on ne demande pas au préalable de coder la fonction v.

```
a = 1
n = 0
while abs(a - 1/2) > 10^(-6)
    a = -2 + sqrt(4 + (1+a)^2)
    n = n + 1
end
disp(n)
```

□

e. Qu'est-ce qui permet d'assurer la terminaison du programme précédent ?

Démonstration.

- Le programme précédent termine s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que : $|a_n - \frac{1}{2}| \leqslant 10^{-6}$.
- Or comme $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel : $|a_n - \frac{1}{2}| \leqslant \varepsilon$.

C'est donc la convergence de (a_n) vers $\frac{1}{2}$ qui permet d'assurer qu'il existe un rang à partir duquel l'écart entre a_n et $\frac{1}{2}$ est plus petit que $\varepsilon = 10^{-6}$.

□