Concours Blanc n$^{\text{o}}$ 2

—

Mathématiques

Mercredi 1er juin

Exercice 1

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout entier n strictement positif par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx$$

1. Calculer le premier terme u_1 de la suite.

Démonstration.

$$u_1 \;=\; \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \;=\; \left[\ \ln(|1+x|)\ \right]_0^1 \;=\; \left[\ \ln(1+x)\ \right]_0^1 \;=\; \ln(2) - \cancel{\ln(0)} \;=\; \ln(2)$$

$$\boxed{u_1 \;=\; \ln(2)}$$

□

2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $x \in [0,1]$. On a alors : $x^{n-1} \geqslant 0$ et $1+x > 0$.
  On en déduit que : $\dfrac{x^{n-1}}{1+x} \geqslant 0$.
  En intégrant de part et d'autre sur le **segment** $[0,1]$ $(1 \geqslant 0)$, on obtient :

$$u_n \;=\; \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx \geqslant \int_0^1 0\,dx \;=\; 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0}$$

- Démontrons maintenant que (u_n) est décroissante.

$$u_{n+1} - u_n \;=\; \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx - \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx \;=\; \int_0^1 \frac{(x^n - x^{n-1})}{1+x}\,dx$$

  Soit $x \in [0,1]$.
  - $x^n - x^{n-1} \;=\; x^{n-1}(x-1) \;\leqslant\; 0$ car $x^{n-1} \geqslant 0$ et $x - 1 \leqslant 0$.
  - $\dfrac{1}{1+x} \geqslant 0$.

  Ainsi : $\dfrac{x^{n-1}(x-1)}{1+x} \leqslant 0$.
  En intégrant de part et d'autre sur le **segment** $[0,1]$ $(1 \geqslant 0)$, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{(x^n - x^{n-1})}{1+x}\,dx \leqslant 0 \quad \textit{i.e.} \quad u_{n+1} - u_n \leqslant 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi } u_{n+1} \leqslant u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ ce qui signifie que la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$$

□

3. Montrer que l'on a, pour tout entier n strictement positif : $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{n-1}\,\cancel{(x+1)}}{\cancel{1+x}}\,dx \\ &= \int_0^1 x^{n-1}\,dx = \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n}.}$$

□

4. En déduire une fonction **Scilab** qui prend un entier n strictement positif et qui renvoie u_n, le n-ième terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Démonstration.

```
function u = suiteU(n)
    u = log(2)
    for i = 1:(n-1)
        u = 1/i - u
    end
endfunction
```

(la suite commençant au rang 1, une fois l'initialisation effectuée il reste `n-1` *mise à jour à effectuer)*

□

5. Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité :

$$\frac{1}{n} \leqslant 2u_n \leqslant \frac{1}{n-1}$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Par décroissance de (u_n), on a : $u_{n+1} \leqslant u_n$.
  On en déduit que :

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} + u_n & \leqslant & u_n + u_n \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \dfrac{1}{n} & & 2\,u_n \end{array}$$

- De même : $u_{n-1} \geqslant u_n$ donc $\dfrac{1}{n-1} = u_n + u_{n-1} \geqslant u_n + u_n = 2u_n$.

$$\boxed{\text{On en déduit que pour tout } n \geqslant 2 : \frac{1}{n} \leqslant 2\,u_n \leqslant \frac{1}{n-1}.}$$

× $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

× $\dfrac{1}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par le théorème d'encadrement, la suite } (u_n) \text{ est convergente, de limite } 0.}$$

□

6. À l'aide de l'inégalité précédente, trouver un équivalent simple de u_n.

Démonstration.
Démontrons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$ ou, dit autrement, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\frac{1}{2n}} = 1$.
Il s'agit donc de démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n\ u_n = 1$.
D'après l'inégalité précédente :

$$1 = \frac{n}{n} \leqslant 2n\ u_n \leqslant \frac{n}{n-1}$$

Or :
× $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$,
× $\dfrac{n}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Ainsi, par le théorème d'encadrement, la suite $\left(\dfrac{u_n}{\frac{1}{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, de limite 1.

$$\boxed{\text{On en conclut que : } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.}$$

□

7. Démontrer par récurrence, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'égalité :

$$u_n = (-1)^n \left(\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) - \ln(2) \right)$$

Cette égalité reste-t-elle vraie lorsque $n = 1$?

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n = (-1)^n \left(\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} \right) - \ln(2) \right)$.

1) **Initialisation** :

- D'une part : $u_2 = \dfrac{1}{1} - u_1 = 1 - \ln(2)$.
- D'autre part :

$$(-1)^2 \left(\left(\sum_{k=1}^{2-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) - \ln(2) \right) = \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) = \frac{(-1)^2}{1} - \ln(2) = 1 - \ln(2)$$

Ainsi, $\mathcal{P}(2)$ est vérifiée.

2) **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Par définition : $u_{n+1} = \dfrac{1}{n} - u_n$. On en déduit, à l'aide de l'hypothèse de récurrence que :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{n} - u_n = \frac{1}{n} - (-1)^n \left(\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) - \ln(2) \right) \\ &= \frac{1}{n} + (-1)^{n+1} \left(\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) - \ln(2) \right) \\ &= (-1)^{n+1} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) - \ln(2) \right) \end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en remarquant que :

$$\begin{aligned}
(-1)^{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) &= (-1)^{n+1}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)\\
&= \frac{(-1)^{n+1}(-1)^{n+1}}{n}+(-1)^{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)\\
&= \frac{1}{n}+(-1)^{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{On en conclut, par principe de récurrence que : } \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ u_n=(-1)^n\left(\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)-\ln(2)\right)}$$

Considérons maintenant le cas $n=1$.

- D'une part : $u_1=\ln(2)$ d'après le calcul en question ***1***.
- D'autre part : $\sum_{k=1}^{0}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\sum_{k\in[\![0,1]\!]}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\sum_{k\in\varnothing}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=0$ et $(-1)^0=1$.

On a bien $u_1 = (-1)^0(0-\ln(2)) = \ln(2)$.

$$\boxed{\text{La propriété est aussi vérifiée au rang } n=1.}$$

□

8. Écrire une fonction Scilab qui demande un entier n strictement positif et qui renvoie u_n, comme dans la question ***4***, mais en utilisant l'égalité de la question précédente.

Démonstration.
On peut répondre à cette question de deux manière différentes.

- En tirant profit de toutes les foncitonnalités **Scilab** pour coder la somme.

```
function u = suiteU(n)
    num = (-1) ^ (2:n)
    denom = 1:(n-1)
    S = num ./ denom
    u = (-1) ^ n * (S - log(2))
endfunction
```

(on notera la présence du symbole ./ qui permet d'effectuer la division membre à membre de deux matrices de même taille)

- De manière plus élémentaire, en utilisant une structure itérative pour coder la somme.

```
function u = suiteU(n)
    S = 0
    for k = 1:(n-1)
        S = S + (-1) ^ (k+1) / k
    end
    u = (-1) ^ n * (S - log(2))
endfunction
```

□

Exercice 2

Soit p un entier naturel fixé. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par : $u_n = \dfrac{1}{\binom{n+p}{n}}$.

1. a) Rappeler les valeurs de $\binom{n}{n}$, $\binom{n+1}{n}$ et $\binom{n+2}{n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $\dbinom{n}{n} \ = \ 1.$
(un ensemble à n éléments ne contient qu'une partie à n éléments)
- $\dbinom{n+1}{n} \ = \ \dbinom{n+1}{(n+1)-n} \ = \ \dbinom{n+1}{1} \ = \ n+1.$
(un ensemble à $n+1$ éléments contient $n+1$ parties à 1 élément : ce sont les singletons)
- $\dbinom{n+2}{n} \ = \ \dfrac{(n+2)!}{n!((n+2)-n)!} \ = \ \dfrac{(n+2)!}{n!\ 2!} \ = \ \dfrac{(n+2)(n+1)}{2}.$

$$\boxed{\binom{n}{n} = 1,\ \binom{n+1}{n} = n+1 \text{ et } \binom{n+2}{n} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.}$$

□

b) Montrer que si $p = 0$ ou $p = 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

Démonstration.

- Si $p = 0$, alors $u_n \ = \ \dfrac{1}{\binom{n}{n}} \ = \ \dfrac{1}{1} \ = \ 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$
Ainsi, la série $\sum u_n$ est (grossièrement) divergente.
- Si $p = 1$, alors $u_n \ = \ \dfrac{1}{\binom{n+1}{n}} \ = \ \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} (\geqslant 0).$
  - × Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente par le critère de Riemann $(1 \not> 1)$.
  - × Donc, par le théorème d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

$$\boxed{\text{Si } p = 0 \text{ ou } p = 1, \text{ la série } \sum u_n \text{ est divergente.}}$$

□

c) Quelle est la nature de la série lorsque $p = 2$?

Démonstration.
Si $p = 2$ alors $u_n \ = \ \dfrac{1}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \ = \ \dfrac{2}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2} (\geqslant 0).$

- Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente par le critère de Riemann $(2 > 1)$.
- Donc, par le théorème d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

$$\boxed{\text{Si } p = 2, \text{ la série } \sum u_n \text{ est convergente.}}$$

□

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $p \geqslant 2$ et on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

2. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+p+2)\ u_{n+2} \ = \ (n+2)\ u_{n+1}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned}(n+p+2)\ u_{n+2} &= (n+p+2)\ \frac{1}{\binom{n+2+p}{n+2}} = (n+p+2)\ \frac{1}{\frac{(n+p+2)!}{(n+2)!\ ((n+p+2)-(n+2))!}} \\ &= (n+p+2)\frac{(n+2)!\ p!}{(n+p+2)!} = \frac{(n+2)!\ p!}{(n+p+1)!} = (n+2)\ \frac{(n+1)!\ p!}{(n+p+1)!}\end{aligned}$$

Or :

$$u_{n+1} = \frac{1}{\binom{n+1+p}{n+1}} = \frac{1}{\frac{(n+p+1)!}{(n+1)!\ ((n+p+1)-(n+1))!}} = \frac{(n+1)!\ p!}{(n+p+1)!}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \forall n \in \mathbb{N},\ (n+p+2)\ u_{n+2} \ = \ (n+2)\ u_{n+1}.}$$

□

b) En déduire par récurrence sur n que $S_n = \frac{1}{p-1}\,(1-(n+p+1)u_{n+1})$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $S_n = \frac{1}{p-1}\,(1-(n+p+1)\ u_{n+1})$.

1) **Initialisation** :

- D'une part : $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{1} u_k = u_1 = \frac{1}{\binom{p+1}{1}} = \frac{1}{p+1}$.
- D'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{1}{p-1}(1-(1+p+1)\ u_2) &= \frac{1}{p-1}\ (1-(p+2)\ u_2) \\ &= \frac{1}{p-1}\ (1-2\ u_1) \qquad \textit{(par la propriété précédente au rang } 0\textit{)} \\ &= \frac{1}{p-1}\ \left(1-2\ \frac{1}{p+1}\right) \\ &= \frac{1}{p-1}\left(\frac{p+1-2}{p+1}\right) = \frac{1}{p-1}\ \frac{p-1}{p+1} \\ &= \frac{1}{p+1} = u_1\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.

2) **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{array}{rcll}
S_{n+1} & = & \sum\limits_{k=1}^{n+1} u_k \; = \; \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right) + u_{n+1} & \textit{(par définition)} \\
& = & \dfrac{1}{p-1} \; (1 - (n+p+1) \; u_{n+1}) + u_{n+1} & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
& = & \dfrac{1}{p-1} \; (1 - (n+p+1) \; u_{n+1} + (p-1) \; u_{n+1}) & \\
& = & \dfrac{1}{p-1} \; (1 - (n+1) \; u_{n+1} - p \; u_{n+1} + (p-1) \; u_{n+1}) & \\
& = & \dfrac{1}{p-1} \; (1 - (n+1) \; u_{n+1} - \; u_{n+1}) \; = \; \dfrac{1}{p-1} \; (1 - (n+2) \; u_{n+1}) & \\
& = & \dfrac{1}{p-1} \; (1 - (n+p+2) \; u_{n+2}) & \textit{(par la propriété précédente)}
\end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

On en conclut, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \; = \; \dfrac{1}{p-1} \; (1 - (n+p+1) \; u_{n+1})$. □

3. a) On pose $v_n \; = \; (n+p) \; u_n$. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Remarquons tout d'abord que $u_n > 0$. En effet, $u_n = \dfrac{1}{\binom{n+p}{n}}$ et $\binom{n+p}{n} > 0$ car c'est le **nombre** de parties à n éléments d'un ensemble à $n+p$ ($\geqslant n$) éléments.
- On a alors :
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \; = \; \frac{(n+p+1)\, u_{n+1}}{(n+p)\, u_n} \; = \; \frac{(n+1)\, u_n}{(n+p)\, u_n} \; = \; \frac{n+1}{n+p}$$
La seconde égalité est justifiée par le résultat de la question ***2.a)*** si $n \neq 0$.
Par ailleurs, la seconde égalité est aussi vérifiée pour $n = 0$ puisque :
$$(p+1)\, u_1 = (p+1)\, \frac{1}{p+1} = 1 = u_0$$
- De plus, comme $p \geqslant 2$, $\; n+p \geqslant n+2 > n+1$ et ainsi : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{n+1}{n+p} < 1$.
Enfin, comme $v_n > 0$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} < 1 \; \Leftrightarrow \; v_{n+1} < v_n$.

La suite (v_n) est donc strictement décroissante.

□

b) En déduire que la suite (v_n) converge vers une limite ℓ positive ou nulle.

Démonstration.

La suite (v_n) est décroissante et minorée par 0 (d'après la question précédente). Elle converge donc vers une limite ℓ telle que $\ell \geqslant 0$. □

c) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge et donner sa somme en fonction de p et ℓ.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
D'après la question ***3.a)***, on a : $S_n = \dfrac{1}{p-1}\left(1 - v_{n+1}\right)$. La suite (v_n) étant convergente, il en est de même de la suite (S_n). De plus :

$$S_n = \frac{1}{p-1}\left(1 - v_{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{p-1}\left(1-\ell\right)$$

$$\boxed{\text{La série } \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n \text{ est convergente, de somme } S = \frac{1-\ell}{p-1}.}$$

□

4. On suppose dans cette question seulement que $\ell \neq 0$.

a) Montrer que $u_n \sim \dfrac{\ell}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\frac{\ell}{n}} = 1$. Or :

$$\frac{u_n}{\frac{\ell}{n}} = \frac{n\ u_n}{\ell} = \frac{n}{\ell}\ u_n = \frac{n}{\ell}\ \frac{v_n}{n+p} = \frac{n}{n+p}\ \frac{v_n}{\ell} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\left(\frac{1}{1+\frac{p}{n}}\right)\frac{v_n}{\ell} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1}\ \frac{\ell}{\ell} = 1$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n}.}$$

□

b) En déduire une contradiction avec la question ***3***.

Démonstration.
D'après la question précédente : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{n} (\geqslant 0)$.

- Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente par le critère de Riemann ($1 \not> 1$). On ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ell}{n}$ est divergente.
- On en déduit, par le théorème d'équivalence des séries à termes positifs, que la série $\sum u_n$ est divergente.

$$\boxed{\text{Ceci contredit le résultat de la question } \textbf{\textit{3.}} \text{ où l'on a démontré que } \sum u_n \text{ est convergente.}}$$

□

5. Donner la valeur de ℓ et en déduire la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$ en fonction de p.

Démonstration.
On a démontré dans les questions précédentes que supposer $\ell \neq 0$ mène à une contradiciton.

$$\boxed{\text{On en conclut que } \ell = 0.}$$

$$\boxed{\text{De plus, d'après la question } \textbf{\textit{3.c)}},\ S = \frac{1-\ell}{p-1}. \text{ On en déduit que } \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{n+p}{n}} = \frac{1}{p-1}.}$$

□

Exercice 3

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n, +\infty[, f_n(x) = \displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{t}}\, dt$.

1. Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$.

Démonstration.
Notons $u : t \mapsto e^{\sqrt{t}}$.

- La fonction u est continue sur $[0, +\infty[$ car c'est la composée de :
  - × $g : t \mapsto \sqrt{t}$, continue sur $[0, +\infty[$. De plus, $g([0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.
  - × $h : t \mapsto e^t$, continue sur $\mathbb{R}$.

  La fonction u est donc continue sur $[n, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle admet donc des primitives sur cet intervalle.
- La fonction f_n est, par définition, la primitive s'annulant au point n de la fonction u.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f_n \text{ est } C^1 \text{ sur } [n, +\infty[\text{ et que pour tout } x \in [n, +\infty[: f_n'(x) = u(x) = e^{\sqrt{x}}}$$

□

2. Donner le sens de variation de f_n.

Démonstration.
Pour tout $x \in [n, +\infty[$, on a : $f_n'(x) = e^{\sqrt{x}} > 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f_n \text{ est strictement croissante sur } [n, +\infty[.}$$

□

3. En minorant $f_n(x)$, établir que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

Démonstration.
Soient $x \in [n, +\infty[$ et $t \in [n,x]$.

On a	n	$\leqslant$	t	$\leqslant$	x	
donc	$\sqrt{n}$	$\leqslant$	$\sqrt{t}$	$\leqslant$	$\sqrt{x}$	*(par croissance de la fonction racine)*
et	$e^{\sqrt{n}}$	$\leqslant$	$e^{\sqrt{t}}$	$\leqslant$	$e^{\sqrt{x}}$	*(par croissance de la fonction exponentielle)*
ainsi	$\displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{n}}\, dt$	$\leqslant$	$\displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{t}}\, dt$	$\leqslant$	$\displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{x}}\, dt$	*(par intégration sur le segment $[n,x]$ $(x \geqslant n)$ de fonctions continues)*

On en déduit que : $f_n(x) \geqslant \displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{n}}\, dt = e^{\sqrt{n}}\,(x - n) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit, par comparaison, que } \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty.}$$

□

4. En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel $\alpha_n \in [n, +\infty[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 1$.

Démonstration.
La fonction f_n est :

- × continue sur $[n, +\infty[$,
- × strictement croissante sur $[n, +\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $[n, +\infty[$ sur $f_n([n, +\infty[) = [f_n(n), \lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)[= [0, +\infty[$.
En effet : $f_n(n) = \displaystyle\int_n^n \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\, dt = 0$.

$$\boxed{\text{Enfin, comme } 1 \in [0, +\infty[\text{, il existe un unique réel } \alpha_n \in [n, +\infty[\text{ tel que } f_n(\alpha_n) = 1.}$$ □

Problème

L'objet du problème est d'étudier les solutions des équations

$$x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0$$

où N est un entier strictement positif et a un nombre réel strictement positif. La première question est consacrée au cas particulier $a = 1$ et $N = 2$. La deuxième question traite le cas général.

1. **Résolution numérique de l'équation** $x^2 + x - 1 = 0 \qquad (0 < x < 1)$

On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geqslant 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

On considère aussi la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que l'équation $x^2+x-1 = 0$ a une seule solution dans l'intervalle $]0,1[$, que l'on notera r_2. Préciser la valeur de r_2.

Démonstration.
Notons $P(X) = X^2 + X - 1$.

- P est un polynôme de degré 2 de discriminant $\Delta = 1^2 - 4(-1) = 1 + 4 = 5 > 0$.
- Ainsi, P admet deux racines réelles :

$$r_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

- Or : $4 < 5 < 9$. Donc : $2 < \sqrt{5} < 3$ et $-2 > -\sqrt{5} > -3$. On en déduit :

$$-3 > -1-\sqrt{5} > -4 \quad \text{et} \quad 1 < 1+\sqrt{5} < 2$$

et enfin : $r_1 \in \left]-2, -\frac{3}{2}\right[$ et $r_2 \in \left]\frac{1}{2},1\right[$.

$$\boxed{\text{L'équation } x^2 + x - 1 = 0 \text{ admet } r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ comme unique solution dans }]0,1[.}$$ □

b) Montrer que si x est un réel de l'intervalle $\left[\frac{1}{2},1\right]$, alors $f(x)$ appartient aussi à l'intervalle $\left[\frac{1}{2},1\right]$.
En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2},1\right]$.

Démonstration.
Soit $x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$. On a alors

$$\begin{array}{lrcccl} \text{On a alors} & \frac{1}{2} & \leqslant & x & \leqslant & 1 \\ \text{donc} & \frac{3}{2} & \leqslant & x+1 & \leqslant & 2 \\ \text{et} & \frac{2}{3} & \geqslant & \frac{1}{x+1} & \geqslant & \frac{1}{2} \end{array}$$

(par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$)

$$\boxed{\text{Comme } \frac{2}{3} \leqslant 1, \text{ on en déduit que } f(x) \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right].}$$

Démontrons maintenant par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

1) **Initialisation** :
$u_0 = 1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

2) **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Par définition, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
On en déduit donc, par la propriété que l'on vient de montrer, que $f(u_n) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
D'où $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].}$$

□

c) Calculer la dérivée f' de f et prouver l'inégalité suivante pour $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$: $|f'(x)| \leqslant \frac{4}{9}$.

Démonstration.

- La fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ car c'est l'inverse de la fonction $x \mapsto x+1$, qui est C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ (en tant que fonction polynomiale) et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$.
- Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

(soit comme dérivée de l'inverse soit en écrivant $f(x) = (1+x)^{-1}$)
Ainsi, $|f'(x)| = \left|\frac{-1}{(x+1)^2}\right| = \frac{|-1|}{|(x+1)^2|} = \frac{1}{(x+1)^2}$.

- Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

$$\begin{array}{llcccccl}
\text{On a alors} & & \frac{1}{2} & \leqslant & x & \leqslant & 1 & \\
\text{donc} & & \frac{3}{2} & \leqslant & x+1 & \leqslant & 2 & \\
\text{et} & \frac{9}{4} = & \left(\frac{3}{2}\right)^2 & \leqslant & (x+1)^2 & \leqslant & 2^2 = 4 & \textit{(par croissance de la fonction carrée sur } \mathbb{R}^+\textit{)} \\
\text{ainsi} & & \frac{4}{9} & \geqslant & \frac{1}{(x+1)^2} & \geqslant & \frac{1}{2} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}^{+*}\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ |f'(x)| \leqslant \frac{4}{9}.}$$

□

d) Prouver l'inégalité suivante, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - r_2| \leqslant \frac{4}{9} |u_n - r_2|$$

En déduire qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - r_2| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

Démonstration.

- D'après les questions précédentes :
  - × f est dérivable sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$,
  - × $\forall x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{4}{9}$.

  On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis que :

  $$\forall (x,y) \in \left[\frac{1}{2},1\right]^2, \ |f(y) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2} \ |y - x|$$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in \left[\frac{1}{2},1\right]$ et $x = r_2 \in \left[\frac{1}{2},1\right]$, on obtient :

  $$|f(u_n) - f(r_2)| \leqslant \frac{4}{9} \ |u_n - r_2|$$

  Or r_2 vérifie ${r_2}^2 + r_2 - 1 = 0$. Ainsi :

  $${r_2}^2 + r_2 = 1 \quad \text{et} \quad r_2\,(r_2 + 1) = 1 \quad \text{d'où} \quad r_2 = \frac{1}{r_2 + 1} = f(r_2)$$

  $$\boxed{\text{On en conclut : } |u_{n+1} - r_2| \leqslant \frac{4}{9} \ |u_n - r_2|.}$$

- Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $|u_n - r_2| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

  1) **Initialisation** :
  $|u_0 - r_2| \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 1$ car u_0 et r_2 sont des éléments de $\left[\frac{1}{2},1\right]$.
  Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

  2) **Hérédité** :
  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $|u_{n+1} - r_2| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$).
  D'après le résultat précédent : $|u_{n+1} - r_2| \leqslant \frac{4}{9} \ |u_n - r_2|$.
  Or, par hypothèse de récurrence : $|u_n - r_2| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n$.
  En combinant ces deux résultats, on obtient :

  $$|u_{n+1} - r_2| \leqslant \frac{4}{9} |u_n - r_2| \leqslant \frac{4}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^n = \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

  $$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n - r_2| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n.}$$

$\square$

e) À partir de quelle valeur de n le terme u_n est-il une valeur approchée de r_2 à 10^{-6} près ?
On choisira la réponse parmi : $n = 9$, 18, 24, ou 36.
On donne : $\ln(10) \simeq 2{,}30$ $\ln(2) \simeq 0{,}69$ $\ln(3) \simeq 1{,}10$.

Démonstration.

- Pour que u_n soit une valeur approchée de r_2 à 10^{-6} près, il suffit que : $\left(\frac{4}{9}\right)^n \leqslant 10^{-6}$.

  En effet, si c'est le cas on obtient par transitivité : $|u_n - r_2| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n \leqslant 10^{-6}$.

- Or :

$$\begin{array}{rrcll} & \left(\frac{4}{9}\right)^n & \leqslant & 10^{-6} & \\ \Leftrightarrow & n \ln\left(\frac{4}{9}\right) & \leqslant & -6\ln(10) & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln\textit{)} \\ \Leftrightarrow & n & \geqslant & \dfrac{-6\ln(10)}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)} & \textit{(car } \ln(\tfrac{4}{9}) < 0 \textit{ puisque } \tfrac{4}{9} < 1\textit{)} \end{array}$$

  De plus :

$$\frac{-6\ \ln(10)}{\ln(\frac{4}{9})} = \frac{-6\ \ln(10)}{\ln(4) - \ln(9)} = \frac{-6\ \ln(10)}{\ln(2^2) - \ln(3^2)} = \frac{-6\ \ln(10)}{2\ \ln(2) - 2\ \ln(3)}$$
$$= \frac{-6\ \ln(10)}{2\,(\ln(2) - \ln(3))} = \frac{-3\ \ln(10)}{\ln(2) - \ln(3)} = \frac{3\ \ln(10)}{\ln(3) - \ln(2)}$$

  Enfin :

$$\frac{3\ \ln(10)}{\ln(3) - \ln(2)} \simeq \frac{3 \times 2{,}3}{1{,}1 - 0{,}7} = \frac{6{,}9}{0.4} = \frac{6{,}9}{\frac{4}{10}} = \frac{10 \times 6{,}9}{4} = \frac{69}{4}$$

Comme $68 < 69 \leqslant 72$, on a $17 < \dfrac{69}{4} \leqslant 18$, le choix de $n = 18$ assure que u_n est une approximation de r_2 à 10^{-6} près. □

2. Étude de l'équation $x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0$

On note f_N la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_N(x) = x^N + x^{N-1} + \ldots + x^2 + x - a$.

a) Montrer que l'équation $f_N(x) = 0$ possède une unique solution strictement positive x_N.
Montrer que lorsque $N > a$, on a $x_N \in \,]0,1[$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On étudie le comportement de la fonction sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- La fonction f_N est C^∞ sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale.
- $f_N(0) = -a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_N(x) = +\infty$ car $f_N(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^N$
  (f_N étant une application polynomiale, son terme prépondérant en $+\infty$ est son terme de plus haut degré)
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $f_N(x) = \left(\sum\limits_{k=1}^{N} x^k\right) - a$, on a : $f'_N(x) = \left(\sum\limits_{k=1}^{N} k\,x^{k-1}\right)$.

  Ainsi, pour tout $x > 0$, $f'_N(x) > 0$ comme somme de termes strictement positifs. On en déduit que f_N est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

La fonction f_N est :

$\times$ continue sur $]0,+\infty[$,

$\times$ strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f_N(]0,+\infty[)$. Or :

$$f_N(]0,+\infty[) \ = \ ]f_N(0), \lim_{x\to+\infty} f_N(x)[\ = \ ]-a,+\infty[$$

$\boxed{\text{Or } a > 0 \text{ donc } 0 \in]-a,+\infty[. \text{ On en déduit donc que l'équation } f_N(x) = 0 \text{ admet une unique solution } x_N \in]0,+\infty[.}$

Supposons $N > a$. Calculons $f_N(1)$:

$$f_N(1) \ = \ \left(\sum_{k=1}^{N} 1^k\right) - a \ = \ N - a \ > \ 0 \ = \ f_N(x_N)$$

En appliquant de part et d'autre f_N^{-1}, strictement croissante, on obtient que : $1 > x_N$.

$\boxed{\text{Ainsi, si } N > a, \text{ on a bien : } x_N \in]0,1[.}$ □

b) Montrer la relation :

$$(x-1)f_N(x) \ = \ x^{N+1} - (a+1)\,x + a$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Remarquons tout d'abord :

$$(x-1)\ \left(\sum_{k=1}^{N} x^k\right) \ = \ \sum_{k=1}^{N} x^k\,(x-1) \ = \ \sum_{k=1}^{N} (x^{k+1} - x^k) \ = \ x^{N+1} - x^1 \ = \ x^{N+1} - x$$

- On en déduit que :

$$\begin{aligned}(x-1)\ f_N(x) \ &= \ (x-1)\ \left(\left(\sum_{k=1}^{N} x^k\right) - a\right) \ = \ (x-1)\ \left(\sum_{k=1}^{N} x^k\right) - (x-1)\,a \\ &= \ x^{N+1} - x - a\,x + a \ = \ x^{N+1} - (a+1)\,x + a\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ (x-1)f_N(x) \ = \ x^{N+1} - (a+1)\,x + a}$ □

c) Montrer que $f_{N+1}(x_N) > f_N(x_N)$ et en déduire que la suite (x_N) est strictement décroissante. Montrer que x_N converge vers un nombre x^* appartenant à $[0,1[$, quand N tend vers $+\infty$.

Démonstration.

- Soient $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Par définition :

$$f_{N+1}(x) \ = \ \left(\sum_{k=1}^{N+1} x^k\right) - a \ = \ x^{N+1} + \left(\sum_{k=1}^{N} x^k\right) - a \ = \ x^{N+1} + f_N(x)$$

- Ainsi : $f_{N+1}(x_N) \ = \ (x_N)^{N+1} + f_N(x_N) \ > \ f_N(x_N)$ car $x_N > 0$.

$\boxed{f_{N+1}(x_N) \ > \ f_N(x_N)}$

- D'autre part, comme $f_{N+1}(x_{N+1}) = 0 = f_N(x_N)$, l'inégalité précédente peut s'écrire :

$$f_{N+1}(x_N) \ > \ f_{N+1}(x_{N+1})$$

En appliquant de part et d'autre f_{N+1}^{-1}, strictement croissante, on obtient : $x_N > x_{N+1}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } N \in \mathbb{N}^*,\ x_N > x_{N+1}. \text{ La suite } (x_N) \text{ est donc strictement décroissante.}}$$

- Considérons maintenant $N > a$. D'après la question ***2.a)***, on a : $x_N \in]0,1[$.
La suite (x_N) est décroissante et minorée par 0.

$$\boxed{\text{Elle converge donc vers une limite } x^* \text{ telle que } x^* \in [0,1].}$$

(Attention ! Par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent larges)

- Il reste alors à démontrer que $x^* \neq 1$. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > a$.
En utilisant une nouvelle fois la question ***2.a)***, on obtient : $x_p < 1$.
Comme (x_N) est décroissante, pour tout $N \geqslant p$, on a : $x_N \leqslant x_p$.
En faisant tendre N vers $+\infty$, on a : $x^* \leqslant x_p < 1$.

$$\boxed{\text{On a bien } x^* \in [0,1[.}$$

□

d) Soit A un entier naturel non nul tel que $A \leqslant N$. Montrer que $0 < x_N^N \leqslant x_A^N$.

En choisissant $A > a$, en déduire la limite de x_N^N lorsque N tend vers $+\infty$ puis, à l'aide de la question ***2b)***, exprimer x^* en fonction de a.

Démonstration.

- La suite (x_N) étant décroissante, et comme $A \leqslant N$, on a : $x_N \leqslant x_A$.
Les éléments de (x_N) étant strictement positifs, on a : $0 < x_N \leqslant x_A$.
- Par stricte croissance de la fonction élévation à la puissance N sur $\mathbb{R}^+$, on obtient :

$$0^N < x_N^N \leqslant x_A^N \quad \textit{i.e.} \quad 0 < x_N^N \leqslant x_A^N$$

- Si $A > a$, on a : $x_A \in]0,1[$. Ainsi, $(x_A)^N \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit, par le théorème d'encadrement, que } (x_N^N) \text{ est convergente, de limite 0.}}$$

- En écrivant la relation obtenue en ***2.b)*** en $x = x_N$, on obtient :

$$(x_N - 1)\, f_N(x_N) \ = \ (x_N)^{N+1} - (a+1)\, x_N + a$$

soit :

$$(x_N)^{N+1} - (a+1)\, x_N + a \ = \ 0 \quad \text{puisque, par définition,} \quad f_N(x_N) = 0$$

Par passage à la limite dans cette égalité, on obtient : $0 - (a+1)\, x^* + a \ = \ 0$.

$$\boxed{\text{On en conclut que : } (a+1)\, x^* = a \ \ \textit{i.e.}\ \ x^* = \frac{a}{a+1} \text{ puisque } a+1 > 0.}$$

□

On convient alors de poser $x_N = \dfrac{a}{a+1}(1+\varepsilon_N)$, et ε_N tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$.

e) Établir à l'aide de la relation de la question ***2b)*** l'égalité suivante :

$$(N+1)\varepsilon_N \left[\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln(1+\varepsilon_N)\right] = \varepsilon_N \ln \varepsilon_N + \varepsilon_N \ln a$$

En déduire les limites de $(N+1)\varepsilon_N$ et de $(1+\varepsilon_N)^{N+1}$ lorsque N tend vers $+\infty$, puis déterminer un équivalent de ε_N en fonction de a et N.

Démonstration.

- En question ***2)b)***, on a démontré que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$(x-1)\, f_N(x) \ = \ x^{N+1} - (a+1)\, x + a$$
En prenant cette relation en $x = x_N$, on obtient :
$$(x_N-1)\, f_N(x_N) \ = \ x_N^{N+1} - (a+1)\, x_N + a$$
Comme $f_N(x_N) = 0$, on en déduit : $\quad x_N^{N+1} \ = \ (a+1)\, x_N - a$.
Enfin, en remplaçant x_N par la valeur fournie par l'énoncé, on obtient :
$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{a+1}\right)^{N+1} (1+\varepsilon_N)^{N+1} \ &= \ a\,(1+\varepsilon_N) - a \\ &= \ a\,\varepsilon_N \end{aligned}$$
Afin d'appliquer la fonction ln de part et d'autre de cette égalité, on doit vérifier que toutes les quantités sont strictement positives :
  - × $a > 0$ d'après l'énoncé,
  - × $\varepsilon_N > 0$. En effet, par stricte décroissance de la suite (x_N), on a : $x_N > x^*$.
Et, comme $x^* = \dfrac{a}{a+1}$, on en déduit que : $1 + \varepsilon_N > 1$ *i.e.* $\varepsilon_N > 0$.

  Ainsi :
$$(N+1)\ \left(\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln(1+\varepsilon_N)\right) \ = \ \ln(a) + \ln(\varepsilon_N)$$
D'où, en multipliant de part et d'autre ε_N :
$$\boxed{(N+1)\,\varepsilon_N\ \left(\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln(1+\varepsilon_N)\right) \ = \ \varepsilon_N\ \ln(a) + \varepsilon_N\ \ln(\varepsilon_N)}$$

- On déduit de l'égalité précédente :
$$(N+1)\,\varepsilon_N \ = \ \frac{\varepsilon_N\ \ln(a) + \varepsilon_N\ \ln(\varepsilon_N)}{\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln(1+\varepsilon_N)}$$
On note au passage que le dénominateur est non nul car :
$$\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln(1+\varepsilon_N) = 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{a}{a+1}\,(1+\varepsilon_N) = 1$$
Cette dernière égalité signifierait que $x_N = 1$, ce qui n'a pas de sens puisque la suite (x_N) est strictement décroissante.
Or :
  - × $\lim\limits_{N\to+\infty} \ \varepsilon_N\ \ln(a) \ = \ 0$ car $\varepsilon_N \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
  - × $\lim\limits_{N\to+\infty} \ \varepsilon_N\ \ln(\varepsilon_N) \ = \ \lim\limits_{x\to 0} \ x\ \ln(x) \ = \ 0$,
  - × $\lim\limits_{N\to+\infty} \ \ln\left(\dfrac{a}{a+1}\right) + \ln(1+\varepsilon_N) \ = \ \ln\left(\dfrac{a}{a+1}\right) \neq 0$ car $a \neq a+1$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \lim_{n\to+\infty} \ (N+1)\,\varepsilon_N \ = \ 0.}$$

- D'autre part : $(1+\varepsilon_N)^{N+1} \ = \ \exp((N+1)\ \ln(1+\varepsilon_N)) \ = \ \exp\left((N+1)\,\dfrac{\ln(1+\varepsilon_N)}{\varepsilon_N}\,\varepsilon_N\right)$.

  Or :

  × $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\varepsilon_N)}{\varepsilon_N} \ = \ 1$ car $\varepsilon_N \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

  × $\lim\limits_{N\to+\infty} (N+1)\,\varepsilon_N \ = \ 0$ d'après la question précédente.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \lim\limits_{N\to+\infty} (1+\varepsilon_N)^{N+1} \ = \ \mathrm{e}^0 = 1}$$

- On a démontré dans le premier point de cette question que :

$$\left(\frac{a}{a+1}\right)^{N+1} (1+\varepsilon_N)^{N+1} \ = \ a\,\varepsilon_N$$

  On en déduit que :

$$\frac{\varepsilon_N}{\frac{1}{a}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{N+1}} \ = \ (1+\varepsilon_N)^{N+1} \ \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \varepsilon_N \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{N+1}}$$

$\square$