DS Vocabulaire n° 1

Lundi 21 septembre

Nom : **Prénom :**

1. On considère un réel $x \in \mathbb{R}$.
Notons p la proposition mathématique : $(\forall \varepsilon > 0,\ x \leqslant \varepsilon) \ \Rightarrow\ x \leqslant 0$.

a) Écrire la réciproque de cette proposition p.

> La réciproque de p est la proposition : $x \leqslant 0 \ \Rightarrow\ (\forall \varepsilon > 0,\ x \leqslant \varepsilon)$.

b) Écrire la contraposée de cette proposition p.

> La contraposée de p est la proposition : $\texttt{NON}(x \leqslant 0) \ \Rightarrow\ \texttt{NON}(\forall \varepsilon > 0,\ x \leqslant \varepsilon)$.
> Cette proposition est équivalente à : $x > 0 \ \Rightarrow\ (\exists \varepsilon > 0,\ x > \varepsilon)$.

c) Nier cette proposition p.

> La négation de p est la proposition : $(\forall \varepsilon > 0,\ x \leqslant \varepsilon)$ $\texttt{ET}$ $\texttt{NON}(x \leqslant 0)$.
> Cette proposition est équivalente à : $(\forall \varepsilon > 0,\ x \leqslant \varepsilon)$ $\texttt{ET}$ $x > 0$.

2. Écrire sans valeur absolue la quantité $q(x) = |x^2 - x + 5| + |x^2 - 6x - 7| + |-5|$.
On pourra représenter le résultat sous forme de tableau.

- Notons $S(X) = X^2 - X + 5$. Ce polynôme est de signe constant (positif) car son discriminant est : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 5 = -19 < 0$.
- Notons $T(X) = X^2 - 6X - 7$. Ce polynôme a pour racine évidente $x_1 = -1$.
  Sa seconde racine x_2 est donnée par la formule : $x_1 x_2 = \dfrac{-7}{1} = -7$. Ainsi, $x_2 = \dfrac{-7}{-1} = 7$.

x	$-\infty$		-1		7		$+\infty$
Valeur de $\|x^2 - x + 5\|$		$x^2 - x + 5$		$x^2 - x + 5$		$x^2 - x + 5$	
Signe de $x^2 - 6x - 7$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Valeur de $\|x^2 - 6x - 7\|$		$x^2 - 6x - 7$	0	$-x^2 + 6x + 7$	0	$x^2 - 6x - 7$	
Valeur de $\|-5\|$		5		5		5	
Valeur de $q(x)$		$2x^2 - 7x + 3$		$5x + 17$		$2x^2 - 7x + 3$	

3. Résoudre l'inéquation : $\sqrt{-1+5x} \;>\; -x+3$.

On note (I) cette inéquation.

0) La quantité $\sqrt{-1+5x}$ est définie si $-1+5x \geqslant 0$ *i.e.* si $x \geqslant \dfrac{1}{5}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, le domaine de définition de l'inéquation est } \mathscr{D}_{(I)} = [\tfrac{1}{5}, +\infty[.}$$

1) Étudions le signe des quantités présentes.

- $\sqrt{-1+5x} \;\geqslant\; 0$ pour tout $x \in \mathscr{D}_{(I)}$ *(une racine est toujours positive)*
- Déterminons le signe de $-x+3$. Deux cas se présentent.
  - × si $-x+3 \;\geqslant\; 0$: dans ce cas ($i.e.$ si $x \in \,]-\infty, 3]$), on a les équivalences suivantes.

$$\begin{array}{rrcl} & \sqrt{-1+5x} & > & -x+3 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{-1+5x})^2 & > & (-x+3)^2 \\ \Leftrightarrow & -1+5x & > & x^2-6x+9 \\ \Leftrightarrow & x^2-11x+10 & < & 0 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'ensemble des solutions dans ce cas est} \\ S_1 = \mathscr{D}_{(I)} \cap \,]-\infty, 3] \;\cap\; \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-11x+10 < 0\}.\end{array}}$$

  - × si $-x+3 \;<\; 0$: dans ce cas ($i.e.$ si $x \in \,]3, +\infty[$), l'inéquation est toujours vérifiée. En effet, on a alors $\sqrt{-1+5x} \;\geqslant\; 0 \;>\; -x+3$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions dans ce cas est } S_2 = \mathscr{D}_{(I)} \cap \,]3, +\infty[\; = \;]3, +\infty[.}$$

2) Il reste à déterminer précisément S_1.
Notons $P(X) = X^2 - 11X + 10$.
Ce polynôme a pour racine évidente $x_1 = 1$.
Sa seconde racine x_2 est donnée par la formule : $x_1 x_2 = \dfrac{10}{1} = 10$.
Ainsi, $x_2 = \dfrac{10}{x_1} = 10$.
On a donc $P(x) < 0$ si $x \in \,]1, 10[$.

$$\boxed{S_1 = [\tfrac{1}{5}, +\infty[\;\cap\;]-\infty, 3] \cap \,]1, 10[\;=\;]1, 3]}$$

(faire un schéma situant les différents points sur la droite réelle)

3) L'ensemble (S) des solutions de l'inéquation (I) est donc :

$$\boxed{S \;=\; S_1 \;\cup\; S_2 \;=\;]1, +\infty[}$$