DS Vocabulaire n° 1

Lundi 21 septembre

Nom : **Prénom :**

1. On considère un entier $z \in \mathbb{Z}$.
Notons p la proposition mathématique : $z \geqslant 0 \ \Rightarrow \ (\forall m \in \mathbb{N},\ z \geqslant -m)$.

a) Écrire la réciproque de cette proposition p.

La réciproque de p est la proposition : $(\forall m \in \mathbb{N},\ z \geqslant -m) \ \Rightarrow \ z \geqslant 0$.

b) Écrire la contraposée de cette proposition p.

La contraposée de p est la proposition : $\texttt{NON}(\forall m \in \mathbb{N},\ z \geqslant -m) \ \Rightarrow \ \texttt{NON}(z \geqslant 0)$.
Cette proposition est équivalente à : $(\exists m \in \mathbb{N},\ z < -m) \ \Rightarrow \ z < 0$.

c) Nier cette proposition p.

La négation de p est la proposition : $z \geqslant 0 \ \texttt{ET} \ \texttt{NON}(\forall m \in \mathbb{N},\ z \geqslant -m)$.
Cette proposition est équivalente à : $z \geqslant 0 \ \texttt{ET} \ (\exists m \in \mathbb{N},\ z < -m)$.

2. Écrire sans valeur absolue la quantité $q(x) = |3x^2 + 2x + 1| + |x^2 + 7x - 8| + |-7|$.
On pourra représenter le résultat sous forme de tableau.

× Notons $S(X) = 3X^2 + 2X + 1$. Ce polynôme est de signe constant (positif) car son discriminant est : $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 = -8 < 0$.

× Notons $T(X) = X^2 + 7X - 8$. Ce polynôme a pour racine évidente $x_1 = 1$.
Sa seconde racine x_2 est donnée par la formule : $x_1 x_2 = \dfrac{-8}{1} = -8$. Ainsi, $x_2 = \dfrac{-8}{1} = -8$.

x	$-\infty$		-8		1		$+\infty$
Valeur de $\lvert 3x^2+2x+1\rvert$		$3x^2+2x+1$		$3x^2+2x+1$		$3x^2+2x+1$	
Signe de x^2+7x-8		$+$	0	$-$	0	$+$	
Valeur de $\lvert x^2+7x-8\rvert$		x^2+7x-8	0	$-x^2-7x+8$	0	x^2+7x-8	
Valeur de $\lvert -7\rvert$		7		7		7	
Valeur de $q(x)$		$4x^2+9x$		$2x^2-5x+16$		$4x^2+9x$	

3. Résoudre l'inéquation : $\sqrt{-3x+19} \; < \; x-5$.

On note (I) cette inéquation.

0) La quantité $\sqrt{-3x+19}$ est définie si $-3x+19 \geqslant 0$ *i.e.* si $x \leqslant \dfrac{19}{3}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, le domaine de définition de l'inéquation est } \mathscr{D}_{(I)} =]-\infty, \tfrac{19}{3}].}$$

1) Étudions le signe des quantités présentes.

- $\sqrt{-3x+19} \; \geqslant \; 0$ pour tout $x \in \mathscr{D}_{(I)}$ *(une racine est toujours positive)*
- Déterminons le signe de $x-5$. Deux cas se présentent.
  - × si $x-5 \geqslant 0$: dans ce cas ($i.e.$ si $x \in \; [5, +\infty[$), on a les équivalences suivantes.

$$\begin{array}{crcl} & \sqrt{-3x+19} & < & x-5 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{-3x+19})^2 & < & (x-5)^2 \\ \Leftrightarrow & -3x+19 & < & x^2-10x+25 \\ \Leftrightarrow & x^2-7x+6 & > & 0 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'ensemble des solutions dans ce cas est} \\ S_1 = \mathscr{D}_{(I)} \; \cap \; [5, +\infty[\; \cap \; \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-7x+6 > 0\}.\end{array}}$$

  - × si $x-5 < 0$: dans ce cas ($i.e.$ si $x \in \;]-\infty, 5[$), la résolution est triviale.
    En effet, si x vérifie (I) alors $\sqrt{-3x+19} \; < \; x-5 \; < \; 0$, ce qui est impossible.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions dans ce cas est } S_2 = \mathscr{D}_{(I)} \; \cap \; \emptyset \; = \; \emptyset.}$$

2) Il reste à déterminer précisément S_1.
Notons $P(X) = X^2 - 7X + 6$.
Ce polynôme a pour racine évidente $x_1 = 1$.
Sa seconde racine x_2 est donnée par la formule : $x_1 x_2 = \dfrac{6}{1} = 6$.
Ainsi, $x_2 = \dfrac{6}{x_1} = 6$.
On a donc $P(x) > 0$ si $x \in \;]-\infty, 1[\; \cup \;]6, +\infty[$.

$$\boxed{S_1 =]-\infty, \tfrac{19}{3}] \; \cap \; [5, +\infty[\; \cap \; (]-\infty, 1[\; \cup \;]6, +\infty[) \; = \;]6, \tfrac{19}{3}]}$$

(faire un schéma situant les différents points sur la droite réelle)

3) L'ensemble (S) des solutions de l'inéquation (I) est donc :

$$\boxed{S \; = \; S_1 \; \cup \; S_2 \; = \; \left]6, \frac{19}{3}\right]}$$