DS Vocabulaire n$^{\text{o}}$ 2

Jeudi 15 octobre

Nom : **Prénom :**

1. Dans la suite, on écrira les règles sous la forme la plus générale possible.

a) Que vaut la somme des n premiers carrés d'entiers ?

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

b) Écrire la règle de sommation d'une constante.

On a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a = n \times a$ et, de manière générale : $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} a = (n-m+1) \times a$

c) Écrire les règles stipulant la linéarité de l'opérateur $\sum$.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda u_i = \lambda u_1 + \lambda u_2 + \cdots + \lambda u_n = \lambda \sum_{i=1}^{n} u_i \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n} (u_j + v_j) = \sum_{j=1}^{n} u_j + \sum_{j=1}^{n} v_j$$

d) Écrire la règle de décalage d'indice.

Pour un décalage de 1 ou de 2 pas : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} u_j = \sum_{k=1}^{n+1} u_{k-1} = \sum_{\ell=2}^{n+2} u_{\ell-2}$

(suffisait pour obtenir les points de cette question)

De manière générale :

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^{n} u_j &= \sum_{k=0}^{n-m} u_{k+m} && \text{en posant } k = j - m \\ &= \sum_{i=m+\ell}^{n+\ell} u_{i-\ell} && \text{en posant } i = j + \ell \end{aligned}$$

e) Écrire la règle du **produit** télescopique.

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_1} \quad \text{et, de manière générale :} \quad \prod_{k=m}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_m}$$

f) On considère un carré de n^2 nombres réels (le nombre présent en ligne i et colonne j est noté u_{ij}). Écrire la formule d'interversion pour une sommation de l'ensemble des termes du triangle supérieur strict du carré.

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} u_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j} \right) = \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} u_{i,j} \right)$$

g) Combien y a-t-il de termes sommés dans la somme précédente ?

Il y a $\dfrac{n\ (n-1)}{2}$ termes dans le triangle supérieur strict.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $10^n - (-1)^n$ est multiple de 11.

Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $10^n - (-1)^n$ est multiple de 11.

Initialisation :

On a : $10^0 - (-1)^0 = 1 - 1 = 0$. Or, 0 est un multiple de 11 (puisque $0 = 11 \times 0$).

Donc $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $10^{n+1} - (-1)^{n+1}$ est multiple de 11)

Tout d'abord, on a : $10^{n+1} - (-1)^{n+1} \ = \ 10 \times 10^n - (-1)^{n+1}$

Or, par hypothèse de récurrence ($\mathcal{P}(n)$) on sait que $10^n - (-1)^n$ est un multiple de 11.

Autrement dit, il exite $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $10^n - (-1)^n \ = \ 11\ k$.

Ainsi, on a : $10^n \ = \ 11\ k + (-1)^n$.

D'autre part, remarquons que : $-(-1)^{n+1} = -(-1) \times (-1)^n = (-1)^n$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned} 10^{n+1} - (-1)^{n+1} &= 10 \times (11\ k + (-1)^n) + (-1)^n \\ &= 10 \times 11\ k + 10 \times (-1)^n + (-1)^n \\ &= 11\ (10\ k + (-1)^n) \end{aligned}$$

Ce qui démontre que $10^{n+1} - (-1)^{n+1}$ est un multiple de 11.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

(pour faire cette démo, on pouvait :

× *introduire la suite de terme général $u_n = 10^n + (-1)^n$ et exprimer, dans l'étape d'hérédité, u_{n+1} en fonction de u_n,*

× *commencer la récurrence à $n = 1$. Il fallait alors veiller à respecter le schéma de récurrence (notamment penser à remplacer $\mathbb{N}$ par $\mathbb{N}^*$))*

3. Notons p la proposition mathématique : $a \Rightarrow b$.

a) Écrire la contraposée de cette proposition p.

$\texttt{NON}(b) \Rightarrow \texttt{NON}(a)$

b) Écrire la réciproque de cette proposition p.

$b \Rightarrow a$

c) Écrire la négation de cette proposition p.

$a\ \texttt{ ET }\ \texttt{NON}(b)$