DS Vocabulaire n° 2

Jeudi 15 octobre

Nom : **Prénom :**

1. Dans la suite, on écrira les règles sous la forme la plus générale possible.

a) Donner la formule des sommes géométriques (on traitera aussi le cas $q = 1$).

> Si $q \neq 1$: $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k \; = \; \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q}$ et si $q = 1$: $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} 1^k \; = \; \sum_{k=m}^{n} 1 \; = \; m - n + 1$

b) Écrire la règle de sommation par paquets.

> $$\sum_{i=1}^{n} u_i \; = \; \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{i=m+1}^{n} u_i$$

Par quel autre nom désigne-t-on cette règle ?

> Cette règle est aussi appelée relation de Chasles.

c) Écrire la règle de **multiplication** d'une constante.

> On a : $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a \; = \; a^n$ et, de manière générale : $\displaystyle\prod_{i=m}^{n} a \; = \; a^{n-m+1}$

d) Écrire la règle de sommation dans l'autre sens.

> On a : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} u_j \; = \; \sum_{i=0}^{n} u_{n-i}$ et : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} u_j \; = \; \sum_{i=0}^{n-1} u_{n-i}$

e) On considère un carré de n^2 nombres réels (le nombre présent en ligne i et colonne j est noté u_{ij}). Écrire la formule d'interversion pour une sommation de l'ensemble des termes du triangle supérieur (large) du carré.

> $$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} u_{ij} \; = \; \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} u_{i,j} \right) \; = \; \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} u_{i,j} \right)$$

f) Combien y a-t-il de termes sommés dans la somme précédente ?

Il y a $\dfrac{n\ (n+1)}{2}$ termes dans le triangle supérieur (large).

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $4^n + 5$ est multiple de 3.

Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $4^n + 5$ est un multiple de 3.

Initialisation :

On a : $4^0 + 5 = 1 + 5 = 6$. Or, 6 est un multiple de 3.

Donc $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $4^{n+1} + 5$ est un multiple de 5)

Tout d'abord, on a : $4^{n+1} + 5 \ = \ 4 \times 4^n + 5$

Or, par hypothèse de récurrence ($\mathcal{P}(n)$) on sait que $4^n + 5$ est un multiple de 3.

Autrement dit, il exite $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $4^n + 5 \ = \ 3\ k$. Ainsi, on a : $4^n \ = \ 3\ k - 5$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned} 4^{n+1} + 5 \ &= \ 4 \times (3\ k - 5) + 5 \ = \ 4 \times 3\ k - 15 \\ &= \ 3\ (4\ k - 5) \end{aligned}$$

Ce qui démontre que $4^{n+1} + 5$ est un multiple de 3.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

(on pouvait introduire la suite de terme général $u_n = 4^n + 5$ et exprimer, dans l'étape d'hérédité, u_{n+1} en fonction de u_n)

3. Notons a la proposition mathématique : $p \Rightarrow q$.

a) Écrire la réciproque de cette proposition a.

$$q \Rightarrow p$$

b) Écrire la contraposée de cette proposition a.

$$\texttt{NON}(q) \Rightarrow \texttt{NON}(p)$$

c) Écrire la négation de cette proposition a.

$$p \ \texttt{ET} \ \texttt{NON}(q)$$