DS Vocabulaire n$^{\text{o}}$ 3

Mercredi 2 décembre

Nom : **Prénom :**

1. Dans la suite, on citera précisément les hypothèses des théorèmes.

a) Définition (avec quantificateurs) de : (u_n) constante.

$$(u_n) \text{ constante } \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$$

b) Énoncer le théorème de convergence monotone (un cas).

$$\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ croissante}\\ (u_n) \text{ majorée}\end{array}\right\} \Rightarrow (u_n) \text{ convergente} \qquad \left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ décroissante}\\ (u_n) \text{ minorée}\end{array}\right\} \Rightarrow (u_n) \text{ convergente}$$

c) Définition (avec quantificateurs) de : (u_n) est une suite minorée.

Une suite (u_n) est dite **minorée** si elle admet un minorant : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$

d) Énoncer le théorème de comparaison dans le cas des limites finies.

$$\left.\begin{array}{l}\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } \ell_1 \in \mathbb{R} \ :\ u_n \to \ell_1\\ \text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } \ell_1 \in \mathbb{R} \ :\ v_n \to \ell_2\\ \exists n_0, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n\end{array}\right\} \Rightarrow \ell_1 \leqslant \ell_2$$

e) Définition (avec quantificateurs) de : (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)$

Ou, avec l'abus de notation habituel : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$

f) Énoncer le théorème des suites adjacentes.

$$(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes } \Rightarrow \begin{array}{l}(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont convergentes}\\ \text{et admettent la même limite}\end{array}$$

2. Rappeler l'échelle asymptotique (on précisera la valeur des paramètres).

Pour tout $a > 0$, $b > 0$, $q > 1$, on a : $(\ln n)^b \quad << \quad n^a \quad << \quad q^n \quad << \quad n! \quad << \quad n^n$

3. Limite de $u_n = \dfrac{n^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (\ln n)}{n^2 \times (\ln n)^3 - n \times (\ln n)^7}$

1) $n^5 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (\ln n) \; = \; n^5 \left(1 + \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n (\ln n)}{n^5}\right) \; = \; n^5 \left(1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \dfrac{\ln n}{n^5}\right)$

× $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$

× $\dfrac{\ln n}{n^5} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées

2) $n^2 (\ln n)^3 - n (\ln n)^7 \; = \; n^2 (\ln n)^3 \left(1 - \dfrac{n (\ln n)^7}{n^2 (\ln n)^3}\right) \; = \; n^2 (\ln n)^3 \left(1 - \dfrac{(\ln n)^4}{n}\right)$

× $\dfrac{(\ln n)^4}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées

On en déduit que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^5}{n^2 (\ln n)^3} \; = \; \dfrac{n^3}{(\ln n)^3}$

Par croissances comparées : $\dfrac{n^3}{(\ln n)^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

On a donc : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

4. Limite de $v_n = \sqrt{4n(n-1)} - 2n$

$$\begin{aligned} v_n \; &= \; \sqrt{4n(n-1)} - 2n \; = \; \frac{(\sqrt{4n(n-1)} - 2n) \times (\sqrt{4n(n-1)} + 2n)}{\sqrt{4n(n-1)} + 2n} \\ &= \; \frac{(\sqrt{4n(n-1)})^2 - (2n)^2}{\sqrt{4n(n-1)} + 2n} \; = \; \frac{4n(n-1) - 4n^2}{\sqrt{4n(n-1)} + 2n} \; = \; \frac{\cancel{4n^2} - 4n - \cancel{4n^2}}{\sqrt{4n(n-1)} + 2n} \\ &= \; \frac{-4\cancel{n}}{2\cancel{n} \times \left(\frac{\sqrt{4n(n-1)}}{2n} + 1\right)} \; = \; \frac{-2}{\frac{\sqrt{4n(n-1)}}{2n} + 1} \end{aligned}$$

Or : $\dfrac{\sqrt{4n(n-1)}}{2n} \; = \; \sqrt{\dfrac{4n^2 - 4n}{4n^2}} \; = \; \sqrt{1 - \dfrac{4n}{4n^2}} \; = \; \sqrt{1 - \dfrac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{1} \; = \; 1$

On en déduit que : $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{-2}{1+1} \; = \; \dfrac{-2}{2} \; = \; -1$