# DS Vocabulaire n$^{\text{o}}$ 3

Mercredi 2 décembre

**Nom :** **Prénom :**

***1.*** Dans la suite, on citera précisément les hypothèses des théorèmes.

***a)*** Définition de : $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.

> Deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont dites **adjacentes** si :
> ***1)*** la suite $(u_n)$ est croissante,
> ***2)*** la suite $(v_n)$ est décroissante,
> ***3)*** la suite $(u_n - v_n)$ est convergente, de limite nulle ($u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$).

***b)*** Définition (avec quantificateurs) de : $(u_n)$ est une suite majorée.

> Une suite $(u_n)$ est **majorée** si elle admet un majorant : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$

***c)*** Définition (avec quantificateurs) de : $(u_n)$ est une suite stationnaire.

> Une suite est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang.
> Ce que l'on peut écrire : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n = u_{n_0}$ ou $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = u_n$

***d)*** Énoncer le théorème de passage à la limite (citer un cas) dans une inégalité.

$$\left.\begin{array}{l} \text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R}\ :\ u_n \to \ell \\ \text{Soit } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que }\ :\ \exists n_0, \forall n \geqslant n_0,\ a \leqslant u_n \leqslant b \end{array}\right\} \Rightarrow\ a \leqslant \ell \leqslant b$$

> *(toute autre hypothèse ($a < u_n \leqslant b$, $a \leqslant u_n < b$ ou $a < u_n < b$) amène la même conclusion)*

***e)*** Définition (avec quantificateurs) de : $(u_n)$ diverge vers $-\infty$.

> $\forall A > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0\ \Rightarrow\ u_n < -A)$
> Ou, avec l'abus de notation habituel : $\forall A > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n < -A$

***f)*** Énoncer le théorème d'encadrement.

$$\left.\begin{array}{l} \text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R}\ :\ u_n \to \ell \\ \text{La suite } (w_n) \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R}\ :\ w_n \to \ell \\ \exists n_0, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{La suite } (v_n) \text{ est} \\ \text{convergente, de limite } \ell \end{array}$$

*2.* Rappeler l'échelle asymptotique (on précisera la valeur des paramètres).

Pour tout $a > 0$, $b > 0$, $q > 1$, on a : $(\ln n)^b \quad << \quad n^a \quad << \quad q^n \quad << \quad n! \quad << \quad n^n$

*3.* Limite de $u_n = \dfrac{9^n - n^5 \times (\ln n)^2}{n^8 + \sqrt{n} \times 2^n}$

*1)* $9^n - n^5\,(\ln n)^2 \;=\; 9^n \left(1 - \dfrac{n^5\,(\ln n)^2}{9^n}\right) \;=\; 9^n \left(1 - \dfrac{n^5\,(\ln n)^2}{(3 \times 3)^n}\right)$

$$= 9^n \left(1 - \frac{n^5}{3^n}\,\frac{(\ln n)^2}{3^n}\right)$$

× $\dfrac{n^5}{3^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées

× $\dfrac{(\ln n)^2}{3^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées

*2)* $n^8 + \sqrt{n}\;2^n \;=\; \sqrt{n}\;2^n \left(\dfrac{n^8}{\sqrt{n}\;2^n} + 1\right) \;=\; \sqrt{n}\;2^n \left(\dfrac{n^{\frac{15}{2}}}{2^n} + 1\right)$

× $\dfrac{n^{\frac{15}{2}}}{2^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées

On en déduit que : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{9^n}{\sqrt{n}\;2^n} \;=\; \dfrac{\left(\frac{9}{2}\right)^n}{\sqrt{n}}$

Par croissances comparées : $\dfrac{\left(\frac{9}{2}\right)^n}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

On a donc : $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

*4.* Limite de $v_n = n^2 - \sqrt{n^4 + 1}$

$$\begin{aligned} v_n &= n^2 - \sqrt{n^4+1} = \frac{(n^2 - \sqrt{n^4+1}) \times (n^2 + \sqrt{n^4+1})}{n^2 + \sqrt{n^4+1}} \\ &= \frac{(n^2)^2 - (\sqrt{n^4+1})^2}{n^2 + \sqrt{n^4+1}} = \frac{n^4 - (n^4+1)}{n^2 + \sqrt{n^4+1}} = \frac{\cancel{n^4} - \cancel{n^4} - 1}{n^2 + \sqrt{n^4+1}} \\ &= \frac{-1}{n^2 + \sqrt{n^4+1}} \end{aligned}$$

Or on a :

× $n^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

× $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n^4+1} \;=\; \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} \;=\; +\infty$ (par théorème de composition des limites)

Ainsi : $n^2 + \sqrt{n^4+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On en déduit que : $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$