DS Vocabulaire n$^{\text{o}}$ 5

Vendredi 24 mars

Nom : **Prénom :**

1. Calculer l'inverse de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -7 & 7 \end{array}\right) \Bigg| \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On réalise alors : $\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{array}\right) \Bigg| \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On réalise alors : $\{\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Bigg| \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

On réalise alors : $\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Bigg| \left(\begin{array}{ccc} 5 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

On réalise alors : $\{\ L_1 \leftarrow 3L_1 + 2L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Bigg| \left(\begin{array}{ccc} 21 & -14 & -16 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

On réalise alors : $\begin{cases} L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Bigg| \left(\begin{array}{ccc} 7 & -\frac{14}{3} & -\frac{16}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

On en déduit que B est inversible d'inverse $B^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -\frac{14}{3} & -\frac{16}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(2M + I_n)(M - 3I_n) = 0$.
La matrice M est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

En développant l'égalité, on obtient : $2M^2 - 5M - 3I_n = 0$.

D'où : $2M^2 - 5M = 3I_n$ et $M\ (2M - 5I_n) = 3I_n$. Ainsi : $M\ \left(\frac{1}{3}(2M - 5I_n)\right) = I_n$.

La matrice M est donc inversible d'inverse $M^{-1} = \frac{1}{3}(2M - 5I_n)$.

3. On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

a. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_g$ de g.

b. Sur quel intervalle g est-elle continue ? dérivable ?

c. Déterminer le tableau de variations de g.

d. Déterminer le nombre d'antécédent(s) de 0 par la fonction g.

a. La quantité $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ est définie si :

× $\mathrm{e}^x \neq 0$, ce qui est toujours le cas puisque $\mathrm{e}^x > 0$.

On en déduit que $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}$.

b. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est le quotient de :

× $x \mapsto x$ continue sur $\mathbb{R}$,

× et de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ continue sur $\mathbb{R}$ et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

De même, on démontre que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $g'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{1-x}{(\mathrm{e}^x)^{\cancel{2}}} \cancel{\mathrm{e}^x}$.

Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $1 - x$. Or :

$$g'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ 1 - x = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 1$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

d. ***(1)*** Étude sur $]-\infty, 1[$

La fonction g est :

1) continue sur $]-\infty, 1[$,

2) strictement croissante sur $]-\infty, 1[$.

Elle réalise donc une bijection de $]-\infty, 1[$ sur $g(]-\infty, 1[)$. Or :

$$g(]-\infty, 1[) = \left] \lim_{x \to -\infty} g(x), \lim_{x \to 1} g(x) \right[= \left]-\infty, \frac{1}{\mathrm{e}}\right[$$

Comme $0 \in \left]-\infty, \frac{1}{\mathrm{e}}\right[$, 0 admet un unique antécédent par la fonction g dans l'intervalle $]-\infty, 1[$.

(2) Étude sur $[1, +\infty[$

On démontre de la même manière que $g([1, +\infty[) = \left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

Comme $0 \notin \left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$, 0 n'admet pas d'antécédent par g dans l'intervalle $[1, +\infty[$.