DS Vocabulaire n$^{\text{o}}$ 5

Vendredi 24 mars

Nom : **Prénom :**

1. Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & -6 & -1 \\ 1 & -8 & -13 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & -6 & -1 \\ 1 & -8 & -13 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On réalise alors : $\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -11 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On réalise alors : $\{ \; L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On réalise alors : $\{ \; L_3 \leftarrow -\frac{1}{5}L_3$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \right.$$

On réalise alors : $\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 3 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 5 & \frac{11}{5} & \frac{3}{5} \\ -1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \right.$$

On réalise alors : $\{ \; L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -7 & -\frac{18}{5} & -\frac{4}{5} \\ 5 & \frac{11}{5} & \frac{3}{5} \\ -1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \right.$$

On réalise alors : $\begin{cases} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 7 & \frac{18}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{5}{2} & \frac{11}{10} & \frac{3}{10} \\ -1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \right.$$

On en déduit que A est inversible d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & \frac{18}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{5}{2} & \frac{11}{10} & \frac{3}{10} \\ -1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(M - I_n)(M + 3I_n) = 0$.
La matrice M est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

En développant l'égalité, on obtient : $M^2 + 2M - 3I_n = 0$.

D'où : $M^2 + 2M = 3I_n$ et $M\ (M + 2I_n) = 3I_n$. Ainsi : $M\ \left(\dfrac{1}{3}(M + 2I_n)\right) = I_n$.

La matrice M est donc inversible d'inverse $M^{-1} = \dfrac{1}{3}(M + 2I_n)$.

3. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.

a. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

b. Sur quel intervalle f est-elle continue ? dérivable ?

c. Déterminer le tableau de variations de f.

d. Déterminer le nombre d'antécédent(s) de 0 par la fonction f.

a. La quantité $\dfrac{\ln(x)}{x}$ est définie si :

$\times$ $\ln(x)$ est définie *i.e.* si $x > 0$,

$\times$ et si $x \neq 0$.

On en déduit que $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^{+*}$.

b. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ car elle est le quotient de :

$\times$ $x \mapsto \ln(x)$ continue sur $\mathbb{R}^{+*}$,

$\times$ et de $x \mapsto x$ continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$.

De même, on démontre que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\, x - \ln(x)}{x^2} = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$.

Comme $x^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$. Or :

$$f'(x) = 0 \iff 1 - \ln(x) = 0 \iff \ln(x) = 1 \iff x = \mathrm{e}^1$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	0		e		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
Variations de f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

d. ***(1)*** Étude sur $]0, \mathrm{e}[$

La fonction f est :

1) continue sur $]0, \mathrm{e}[$,

2) strictement croissante sur $]0, \mathrm{e}[$.

Elle réalise donc une bijection de $]0, \mathrm{e}[$ sur $f(]0, \mathrm{e}[)$. Or :

$$f(]0, \mathrm{e}[) =]\lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x \to \mathrm{e}} f(x)[= \left]-\infty, \frac{1}{\mathrm{e}}\right[$$

Comme $0 \in \left]-\infty, \frac{1}{\mathrm{e}}\right[$, 0 admet un unique antécédent par la fonction f dans l'intervalle $]0, \mathrm{e}[$.

(2) Étude sur $[\mathrm{e}, +\infty[$

On démontre de la même manière que $f([\mathrm{e}, +\infty[) = \left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

Comme $0 \notin \left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$, 0 n'admet pas d'antécédent par f dans l'intervalle $[\mathrm{e}, +\infty[$.