

TP11/12 : Méthode d'inversion

- Dans votre dossier `Info_2a`, créer le dossier `TP_12`.

I. Avant-propos

Dans ce TP, on s'intéresse au problème suivant.

Données :

- × une v.a.r. X a priori difficile à simuler informatiquement,
- × la fonction de répartition F de la v.a.r. X .

But :

obtenir une v.a.r. V de même fonction de répartition F
(i.e. de même loi que X) plus simple à simuler informatiquement.

- Rappeler les propriétés qui caractérisent une fonction de répartition.

Une fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une v.a.r. X si :

II. Théorème d'inversion dans le cas où F est bijective

II.1. Énoncé du théorème d'inversion

Théorème 1.

Soit X une v.a.r. dont la loi est donnée par sa fonction de répartition $F : \mathbb{R} \rightarrow]0, 1[$.

Soit U une v.a.r. telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0, 1[)$.

On suppose de plus que :

- × F est continue sur \mathbb{R} ,
- × F est strictement croissante sur \mathbb{R} .

On a alors :

- F est bijective de \mathbb{R} dans $]0, 1[$.
- La v.a.r. $V = F^{-1}(U)$ a pour fonction de répartition F .

- Rappeler la fonction de répartition d'une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0, 1[)$.

- Démontrer le résultat du théorème.

- La fonction F est bijective .
 - Notons G la fonction de répartition de la v.a.r. $F^{-1}(U)$.
Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $G(x) = \mathbb{P}(\quad)$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \Omega$, remarquons tout d'abord que :

$$\begin{aligned} \omega \in [F^{-1}(U) \leq x] \\ \Leftrightarrow F^{-1}(U(\omega)) \leq x \\ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \omega \in \end{aligned}$$

Ainsi, on a : $G(x) = \quad$.

II.2. Application : simulation de lois à l'aide de rand

II.2.a) Loi uniforme sur un intervalle réel

On considère une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ (où a et b deux réels tels que $a < b$).

- Que signifie que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$?

- Calculer la fonction de répartition F de X .

Soit $x \in \mathbb{R}$. On étudie la valeur de $F(x)$ en fonction de x .

- Si $x < a$:

- Si $x \in [a, b]$:

- Démontrer que F réalise une bijection de $[a, b]$ dans $[0, 1]$.
Déterminer sa bijection réciproque $G : [0, 1] \rightarrow [a, b]$.

- On prolonge G en posant $G(x) = a$ si $x < 0$ et $G(x) = b$ si $x > 1$.
Déterminer la loi de la v.a.r. $V = G(U)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

• Si $x < a$:

• Si $x \in [a, b]$:

• Si $x > b$:

Ainsi, on a : $V \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.

- En déduire une simulation en **Scilab** d'une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.
On écrira une fonction `unifContinue` qui :
- × prend en paramètre deux réels `a` et `b`,
 - × renvoie une variable `v` qui contient le résultat de la simulation de X .
- On utilisera la fonction `rand`.

II.3. Le théorème d'inversion aux concours (session 2015)**II.3.a) Simulation d'une v.a.r. suivant une loi exponentielle (EML 2015)**

Soit $\lambda > 0$ et soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

- Que signifie $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$?

- Déterminer la fonction de répartition F de X .

- Démontrer que F réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[0, 1[$.
Déterminer sa bijection réciproque $G : [0, 1[\rightarrow [0, +\infty[$.

- On prolonge G en posant $G(x) = 0$ si $x < 0$. Déterminer la loi de la v.a.r. $V = G(U)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

• Si $x < 0$:

• Si $x \in [0, +\infty[$:

Ainsi, on a : $V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

- ▶ En déduire une simulation en **Scilab** d'une v.a.r. X telle que $X \leftrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
On écrira une fonction `expo` qui :
 - × prend en paramètre un réel `lambda`,
 - × renvoie une variable `v` qui contient le résultat de la simulation de X .On utilisera la fonction `rand`.

L'énoncé EML 2015 commençait par ce résultat d'inversion.

L'usage des fonctions de répartition n'était pas explicitement demandé.


- ▶ Soit U une v.a.r. suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$. Quelle est la loi de la v.a.r. $V = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$?

- ▶ Écrire une fonction en **Scilab** qui, étant donné un réel λ strictement positif, simule la loi exponentielle de paramètre λ .

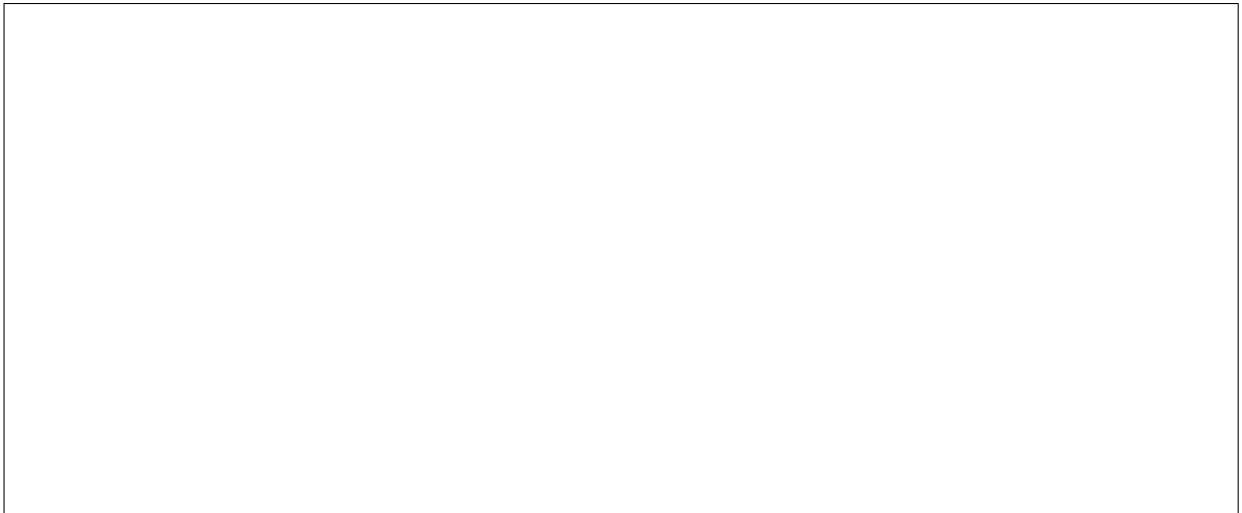
II.3.b) Simulation d'une v.a.r. suivant la loi standard de Gumbel (HEC 2015)

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} à valeurs réelles telle que : $F(x) = \exp(-e^{-\lambda x})$.

- Justifier que F est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et montrer que F réalise une bijection de \mathbb{R} sur $]0, 1[$.

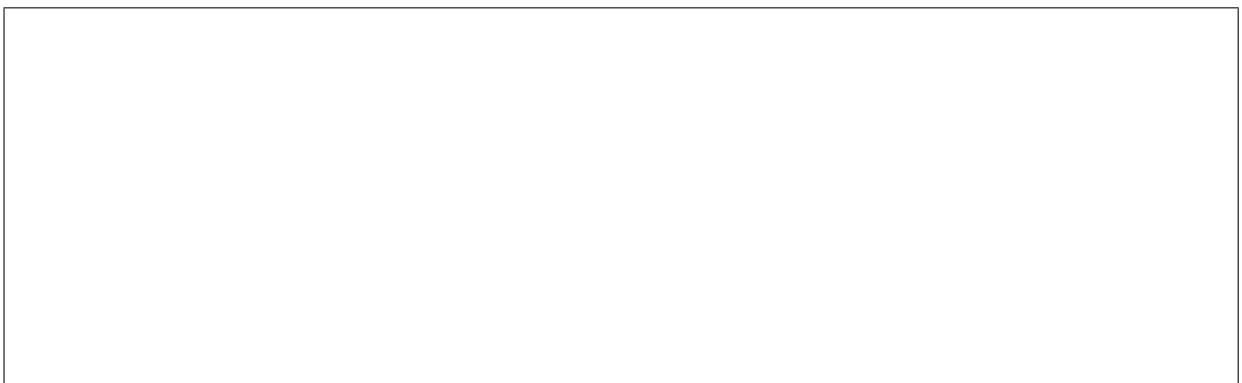


- En déduire que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire T admettant une densité f_T continue sur \mathbb{R} que l'on déterminera ; on dit que T suit la loi de Gumbel de paramètre λ .



On suppose maintenant que $\lambda = 1$.

- Expliciter la bijection réciproque G de la fonction F .



- On considère le programme **Scilab** suivant :

```
x=linspace(-2,2,400); y=(exp(-exp(-x))); plot(x,y), plot(y,x)
```

Le réel 0 fait-il partie des nombres renvoyés par la commande `x=linspace(-2,2,400)` ?

Quel sera le résultat de l'exécution de ce programme ?

- Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$.
Quelle est la loi de la variable aléatoire $G(U)$?

- Par une méthode de votre choix, écrire en **Scilab** les commandes qui permettent de simuler la loi de T .