TP11/12 : Méthode d'inversion

► Dans votre dossier `Info_2a`, créer le dossier `TP_12`.

I. Avant-propos

Dans ce TP, on s'intéresse au problème suivant.

Données :

× une v.a.r. X a priori difficile à simuler informatiquement,

× la fonction de répartition F de la v.a.r. X.

But :
obtenir une v.a.r. V de même fonction de répartition F
(*i.e.* de même loi que X) plus simple à simuler informatiquement.

► Rappeler les propriétés qui caractérisent une fonction de répartition.

Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une v.a.r. X si :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \ 0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1$.

2) F_X est croissante.

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

4) F_X est continue à droite en tout point $x \in \mathbb{R}$.

Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t > x}} F_X(t) = F_X(x)$

5) F_X admet une limite finie à gauche en tout point $x \in \mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, \ \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t < x}} F_X(t) = F_X(x) - \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}([X < x])$

II. Théorème d'inversion dans le cas où F est bijective

II.1. Énoncé du théorème d'inversion

Théorème 1.

Soit X une v.a.r. dont la loi est donnée par sa fonction de répartition $F : \mathbb{R} \to]0,1[$.

Soit U une v.a.r. telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$.

On suppose de plus que :

× *F est continue sur $\mathbb{R}$,*

× *F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

On a alors :

- *F est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.*
- *La v.a.r. $V = F^{-1}(U)$ a pour fonction de répartition F.*

► Rappeler la fonction de répartition d'une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$.

Pour tout $x \in \,]0,1[$, on a : $F_U(x) = x$. Si $x < 0$, $F_U(x) = 0$ et pour $x > 1$, $F_U(x) = 1$.

► Démontrer le résultat du théorème.

- La fonction F est bijective par application du théorème de la bijection.
- Notons G la fonction de répartition de la v.a.r. $F^{-1}(U)$.
  Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $G(x) = \mathbb{P}(\left[F^{-1}(U) \leqslant x\right])$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \Omega$, remarquons tout d'abord que :

$$\begin{array}{cl} & \omega \in \left[F^{-1}(U) \leqslant x\right] \\ \Leftrightarrow & F^{-1}(U(\omega)) \leqslant x \\ \Leftrightarrow & U(\omega) \leqslant F(x) \\ \Leftrightarrow & \omega \in [U \leqslant F(x)] \end{array}$$

  Ainsi, on a : $G(x) = \mathbb{P}(\left[F^{-1}(U) \leqslant x\right]) = \mathbb{P}([U \leqslant F(x)]) = F(x)$.

II.2. Application : simulation de lois à l'aide de `rand`

II.2.a) Loi uniforme sur un intervalle réel

On considère une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$ (où a et b deux réels tels que $a < b$).

► Que signifie que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$?

a) $\boxed{X(\Omega) = [a,b]}$

b) X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

► Calculer la fonction de répartition F de X.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On étudie la valeur de $F(x)$ en fonction de x.

- Si $x < a$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{x} 0\ dt = 0$$

- Si $x \in [a,b]$:

$$\begin{array}{rcl} F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)\ dt + \int_{a}^{x} f(t)\ dt \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{a} 0\ dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\ dt \\ & = & 0 + \dfrac{x-a}{b-a} \end{array}$$

- Si $x > b$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{a} f(t)\ dt + \int_{a}^{b} f(t)\ dt + \int_{b}^{x} f(t)\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{a} 0\ dt + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\ dt + \int_{a}^{x} 0\ dt \\ &= 0 + \frac{b-a}{b-a} + 0 = 1 \end{aligned}$$

▶ Démontrer que F réalise une bijection de $[a, b]$ dans $[0, 1]$.
Déterminer sa bijection réciproque $G : [0, 1] \to [a, b]$.

- Soit $x \in [0, 1]$ et $y \in [a, b]$. On détermine G en raisonnant par équivalence.

$$y = F(x) \Leftrightarrow y = \frac{x-a}{b-a} \Leftrightarrow (b-a)\ y = x - a \Leftrightarrow x = (b-a)\ y + a \Leftrightarrow x = G(y)$$

- Ainsi, la fonction $G : [0, 1] \to [a, b]$ est définie par : $\forall x \in [0, 1],\ G(x) = a + (b-a)\ x$.

▶ On prolonge G en posant $G(x) = a$ si $x < 0$ et $G(x) = b$ si $x > 1$.
Déterminer la loi de la v.a.r. $V = G(U)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < a$:
$[G(U) \leqslant x] = \varnothing$ car $G(U)$ est à valeurs dans $[a, b]$. D'où : $\mathbb{P}([G(U) \leqslant x]) = 0$.
- Si $x \in [a, b]$:
$F_V(x) = \mathbb{P}(G(U) \leqslant x) = \mathbb{P}(F(G(U)) \leqslant F(x)) = \mathbb{P}(U \leqslant F(x)) = F(x)$.
- Si $x > b$:
$[G(U) \leqslant x] = \Omega$ car $G(U)$ est à valeurs dans $[a, b]$. D'où : $\mathbb{P}([G(U) \leqslant x]) = 1$.

Ainsi, on a : $V \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.

▶ En déduire une simulation en **Scilab** d'une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.
On écrira une fonction `unifContinue` qui :

× prend en paramètre deux réels `a` et `b`,

× renvoie une variable `v` qui contient le résultat de la simulation de X.

On utilisera la fonction `rand`.

```
function v = unifContinue(a,b)
    v = a + (b-a) * rand()
endfunction
```

II.3. Le théorème d'inversion aux concours (session 2015)

II.3.a) Simulation d'une v.a.r. suivant une loi exponentielle (EML 2015)

Soit $\lambda > 0$ et soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

► Que signifie $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$?

a) $\boxed{X(\Omega) = [0, +\infty[}$

b) X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

► Déterminer la fonction de répartition F de X.

- Si $x < 0$: $F(x) \ = \ \mathbb{P}(X \leqslant x) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$.
  (en effet, X est à valeurs positives)
- Si $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t) \, dt = \int_{-\infty}^{0} f(t) \, dt + \int_{0}^{x} f(t) \, dt = \int_{0}^{x} \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda t} \, dt \\ &= \lambda \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-\lambda t} \, dt = \lambda \left[\frac{-\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda} \right]_{0}^{x} = -\mathrm{e}^{-\lambda x} + \mathrm{e}^{\lambda 0} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \end{aligned}$$

► Démontrer que F réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[0, 1[$.
Déterminer sa bijection réciproque $G : [0, 1[\to [0, +\infty[$.

- Soient $x \in [0, 1[$ et $y \in [0, +\infty[$. On détermine G en raisonnant par équivalence.

$$y \ = \ F(x) \ \Leftrightarrow \ y \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \ \Leftrightarrow \ 1 - y \ = \ \mathrm{e}^{-\lambda x} \ \Leftrightarrow \ -\lambda \, x \ = \ \ln(1-y) \ \Leftrightarrow \ x \ = \ -\frac{\ln(1-y)}{\lambda}$$

- Ainsi, la fonction $G : [0, 1[\to [0, +\infty[$ est définie par : $\forall x \in [0, 1]$, $G(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{\lambda}$.

► On prolonge G en posant $G(x) = 0$ si $x < 0$. Déterminer la loi de la v.a.r. $V = G(U)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$:
  $[G(U) \leqslant x] \ = \ \varnothing$ car $G(U)$ est à valeurs positives. D'où : $\mathbb{P}([G(U) \leqslant x]) = 0$.
- Si $x \in [0, +\infty[$:
  $\mathbb{P}(G(U) \leqslant x) \ = \ \mathbb{P}(F(G(U)) \leqslant F(x)) \ = \ \mathbb{P}(U \leqslant F(x)) \ = \ F(x)$.

Ainsi, on a : $V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

► En déduire une simulation en **Scilab** d'une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
On écrira une fonction `expo` qui :

× prend en paramètre un réel `lambda`,

× renvoie une variable `v` qui contient le résultat de la simulation de X.

On utilisera la fonction `rand`.

```
function y = expo(lambda)
    v = -(1/lambda) * log(1-rand())
endfunction
```

L'énoncé `EML 2015` commençait par ce résultat d'inversion.
L'usage des fonctions de répartition n'était pas explicitement demandé.

► *Soit U une v.a.r. suivant la loi uniforme sur $[0,1[$. Quelle est la loi de la v.a.r. $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$?*

1) Déterminons tout d'abord le support de V.

- Comme $U(\Omega) = [0,1[$, on a : $(1-U)(\Omega) =]0,1]$.
- Ainsi : $\ln(1-U)(\Omega) =]-\infty, 0]$.
- Enfin : $V(\Omega) = \left(-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)\right)(\Omega) = [0,+\infty[$.

On en déduit que pour tout $x < 0$, on a : $F_V(x) = P(V \leqslant x) = 0$.

2) Déterminons alors $F_V(x)$ pour $x \geqslant 0$. On a alors :

$$[V \leqslant x] = [\ln(1-U) \geqslant -\lambda x] = \left[1 - U \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda x}\right] = \left[U \leqslant 1 - e^{-\lambda x}\right]$$

Et ainsi : $F_V(x) = P(V \leqslant x) = P(U \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}) = F_U(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x})$

On remarque alors que : $1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \in [0,1[$. En effet :

× $1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda x} \leqslant 1 \Leftrightarrow -\lambda x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$,

× $1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \leqslant 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda x} \geqslant 0$.

On en déduit que : $F_V(x) = F_U(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

3) En rassemblant, on obtient donc : $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

et ainsi $V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

► *Ércire une fonction en **Scilab** qui, étant donné un réel λ strictement positif, simule la loi exponentielle de paramètre λ.*

II.3.b) Simulation d'une v.a.r. suivant la loi standard de Gumbel (`HEC 2015`)

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que : $F(x) \;=\; \exp\left(-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)$.

► *Justifier que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.*

- F est de classe C^∞ comme composée de fonctions C^∞, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) \;=\; -(-\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x})\ \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\lambda x}} \;=\; \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\lambda x}} > 0$$

- La fonction F est :

  1) continue sur $\mathbb{R}$,

  2) strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

  Ainsi, F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $F(\mathbb{R}) \;=\,]\lim\limits_{x\to-\infty} F(x), \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)[$. Or :

  × $\lim\limits_{x\to-\infty} -\mathrm{e}^{-\lambda x} \;=\; -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\lambda x}} \;=\; 0$.

  × $\lim\limits_{x\to+\infty} -\mathrm{e}^{-\lambda x} \;=\; 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\lambda x}} \;=\; 1$.

  F réalise bien une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.

► *En déduire que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire T admettant une densité f_T continue sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera ; on dit que T suit la loi de Gumbel de paramètre λ.*

La fonction $F : \mathbb{R} \to]0,1[$ vérifie les propriétés suivantes.

2) F_X est croissante.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

4) F_X est continue à droite en tout point $x \in \mathbb{R}$ car continue sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, F est la fonction de répartition d'une v.a.r. T.
De plus, comme F est :

× continue sur $\mathbb{R}$,

× de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

alors T est une v.a.r. à densité.
On obtient une densité en dérivant F sur l'intervalle ouvert $]-\infty, +\infty[$:
$\forall t \in \mathbb{R},\ f_T(t) \;=\; \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\lambda t}}$.

On suppose maintenant que $\lambda = 1$.

► *Expliciter la bijection réciproque G de la fonction F.*

- Avec $\lambda = 1$, on a $F(x) \;=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$ et on sait que F est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.
- Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0,1[$. On détermine G en raisonnant par équivalence.

$$\begin{aligned} F(x) = y \ &\Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}} = y \ \Leftrightarrow\ -\mathrm{e}^{-x} = \ln y \ \Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{-x} = -\ln y \ \Leftrightarrow\ -x = \ln(-\ln y) \\ &\Leftrightarrow\ x = -\ln(-\ln y) \end{aligned}$$

  (les opérations précédentes sont permises car $y > 0$ et $-\ln y > 0$)

- Ainsi, la fonction $G :]0,1[\to]-\infty, +\infty[$ est définie par : $\forall x \in [0,1],\ G(x) = -\ln(-\ln x)$.

► *On considère le programme* ***Scilab*** *suivant :*
`x=linspace(-2,2,400); y=(exp(-exp(-x))); plot(x,y), plot(y,x)`
Le réel 0 fait-il partie des nombres renvoyés par la commande `x=linspace(-2,2,400)` *?*

- La commande `linspace(-2,2,400)` crée un vecteur ligne contenant 400 nombres régulièrement espacés entre -2 et 2.
- Tout nombre créé est donc de la forme :

$$-2 + \frac{k}{399}\,[2-(-2)] = -2 + \frac{4k}{399}, \text{ avec } k \in [\![0, 399]\!]$$

Pour obtenir 0, il faudrait : $-2 + \dfrac{4k}{399} = 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{4k}{399} = 2 \;\Leftrightarrow\; k = \dfrac{399}{2}$

Or $\dfrac{399}{2}$ n'est pas un entier, donc la valeur 0 ne fait pas partie des nombres renvoyés.

Quel sera le résultat de l'exécution de ce programme ?

- `x` est un vecteur contenant des abscisses entre -2 et 2.
- `y` contient les ordonnées correspondantes par F.
- `plot(x,y)` permet donc de tracer le graphe de F.
- Enfin, `plot(y,x)` effectue le tracé dans lequel le rôle des abscisses et des ordonnées est échangé. Ainsi, cette commande trace le symétrique de la courbe précédente par rapport à la droite d'équation $y = x$. On en déduit que cette commande permet le tracé du graphe de G, réciproque de la fonction F.

► *Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle* $]0, 1[$.
Quelle est la loi de la variable aléatoire $G(U)$?

- G est la réciproque de F donc, d'après la méthode d'inversion, la v.a.r. $G(U)$ a pour fonction de répartition F. Autrement dit, $G(U)$ suit la loi de Gumbel de paramètre 1.
- On peut le démontrer.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme F est strictement croissante sa réciproque G l'est aussi et :

$$[G(U) \leqslant x] \;=\; [G^{-1}(G(U)) \leqslant G^{-1}(x)] \;=\; [U \leqslant F(x)]$$

Ainsi $F_{G(U)}(x) \;=\; F_U(F(x)) \;=\; F(x)$ car $F(x) \in]0, 1[$.

► *Par une méthode de votre choix, écrire en* ***Scilab*** *les commandes qui permettent de simuler la loi de T.*

Les questions précédentes permettent d'écrire le programme :

```
y = rand()
t = -log(-log(u))
```