

DM1 (version A)

Exercice (EDHEC 2017)

Soit V une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, dont la fonction de répartition est la fonction F_V définie par : $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

On pose $W = -\ln(V)$ et on admet que W est aussi une variable aléatoire dont le fonction de répartition est notée F_W . On dit que W suit une loi de Gumbel.

1. a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, F_W(x) = e^{-e^{-x}}$.

b) En déduire que W est une variable à densité.

- On désigne par n un entier naturel non nul et par X_1, \dots, X_n des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que V , c'est à dire la loi $\mathcal{E}(1)$.
- On considère la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, c'est à dire que pour tout ω de Ω , on a : $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$.
On admet que Y_n est une variable aléatoire à densité.

2. a) Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est définie par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) En déduire une densité f_{Y_n} de Y_n .

3. On pose $Z_n = Y_n - \ln(n)$.

On rappelle que `grand(1, n, 'exp', 1)` simule n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1. Compléter la déclaration de fonction `Scilab` suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Z_n .

```
1  function Z = f(n)
2      x = grand(1, n, 'exp', 1)
3      Z = ---
4  endfunction
```

4. On note F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n .

a) Justifier que, pour tout réel x , on a : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$.

b) Déterminer explicitement $F_{Z_n}(x)$.

c) Montrer que, pour tout réel x , on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 - \frac{e^{-x}}{n} \right) = -e^{-x}$.