DM1 (version A)

Exercice (EDHEC 2017)

Soit V une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, dont la fonction de répartition est la fonction F_V définie par : $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

On pose $W = -\ln(V)$ et on admet que W est aussi une variable aléatoire dont le fonction de répartition est notée F_W. On dit que W suit une loi de Gumbel.

1. a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = e^{-e^{-x}}$.

Démonstration.

- Déterminons le support de $W = f(V)$, où $f : x \mapsto -\ln(x)$.
  La fonction F_V est nulle sur $]-\infty, 0]$, donc $V(\Omega) =]0, +\infty[$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcll} x \in V(\Omega) & \Leftrightarrow & x \in]0, +\infty[& \\ & \Leftrightarrow & 0 < x < +\infty & \\ & \Leftrightarrow & -\infty < \ln(x) < +\infty & \textit{(car la fonction } \ln \textit{ est strictement croissante)} \\ & \Leftrightarrow & +\infty > -\ln(x) > -\infty & \\ & \Leftrightarrow & +\infty > f(x) > -\infty & \\ & \Leftrightarrow & f(x) \in \mathbb{R} & \end{array}$$

  Or on sait que :

$$\begin{array}{rcll} W(\Omega) & = & f(V)(\Omega) & \\ & = & \{f(x) \mid x \in V(\Omega)\} & \\ & = & \mathbb{R} & \textit{(d'après les équivalences précédentes)} \end{array}$$

$$\boxed{W(\Omega) = \mathbb{R}}$$

- Déterminons la fonction de répartition de W.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} F_W(x) & = & \mathbb{P}([W \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([-\ln(V) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([\ln(V) \geqslant -x]) & \\ & = & \mathbb{P}([V \geqslant e^{-x}]) & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante)} \\ & = & 1 - \mathbb{P}([V < e^{-x}]) & \\ & = & 1 - F_V(e^{-x}) & \textit{(car } V \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\ & = & \cancel{1} - \left(\cancel{1} - e^{-e^{-x}}\right) & \textit{(car } e^{-x} > 0\textit{)} \\ & = & e^{-e^{-x}} & \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = e^{-e^{-x}}}$$

□

b) En déduire que W est une variable à densité.

Démonstration.
La fonction de répartition F_W est :

× continue sur $\mathbb{R}$ (en tant que composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$).

× de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (en tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$).

$$\boxed{\text{Ainsi, } W \text{ est une variable à densité.}}$$

□

- On désigne par n un entier naturel non nul et par $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que V, c'est à dire la loi $\mathcal{E}(1)$.
- On considère la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, c'est à dire que pour tout ω de Ω, on a : $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$.
On admet que Y_n est une variable aléatoire à densité.

2. a) Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est définie par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Démonstration.

- Déterminons le support de Y_n.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la v.a.r. X_i suit la loi $\mathcal{E}(1)$, et donc $X_i(\Omega) = [0, +\infty[$.
On rappelle que $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Les v.a.r. X_i étant **indépendantes**, Y_n admet pour support $Y_n(\Omega) = [0, +\infty[$.

$$\boxed{Y_n(\Omega) = [0, +\infty[}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminons la fonction de répartition de Y_n en procédant par disjonction de cas :
  – Si $x < 0$: alors $[Y_n \leqslant x] = \varnothing$. Donc, on a :

$$F_{Y_n}(x) = \mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  – Si $x \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) &= \mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([X_1 \leqslant x] \cap \cdots \cap [X_n \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) \times \cdots \times \mathbb{P}([X_n \leqslant x]) && \textit{(car les } X_i \textit{ sont indépendantes)} \\ &= (\mathbb{P}([X_1 \leqslant x])^n && \textit{(car les } X_i \textit{ ont même loi)} \\ &= (1 - \mathrm{e}^{-x})^n && \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

□

b) En déduire une densité f_{Y_n} de Y_n.

Démonstration.

- Y_n est une variable à densité car :
  - × F_{Y_n} est continue sur $\mathbb{R}$.
  - × F_{Y_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0.

    En effet, sur $]-\infty, 0[$, F_{Y_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que fonction constante.
    Sur $]0, +\infty[$, F_{Y_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
- Pour déterminer une densité de Y_n, on dérive F_{Y_n} sur les **intervalles ouverts**.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - Si $x \in]-\infty, 0[$:
    $$f_{Y_n}(x) = F'_{Y_n}(x) = 0$$
  - Si $x \in]0, +\infty[$:
    $$f_{Y_n}(x) = F'_{Y_n}(x) = n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}$$
  - Si $x = 0$: on pose $f_{Y_n}(0) = 0$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

□

3. On pose $Z_n = Y_n - \ln(n)$.
On rappelle que `grand(1,n,'exp',1)` simule n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1. Compléter la déclaration de fonction `Scilab` suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Z_n.

```
function Z = f(n)
    x = grand(1,n,'exp',1)
    Z = ---
endfunction
```

Démonstration.

```
    Z = max(x) - log(n)
```

Remarque

- On rappelle qu'il est inutile de recopier le programme en entier. Écrire la ligne contenant l'information manquante suffit.
- Il est tout à fait possible (et donc non sanctionné) aux concours d'utiliser plusieurs lignes, même si le concepteur a pensé à une réponse sur une seule ligne. Ici, on pouvait dans un premier temps simuler la v.a.r. Y_n puis la v.a.r. Z_n.

```
    Y = max(x)
    Z = Y - log(n)
```

□

4. On note F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n.

a) Justifier que, pour tout réel x, on a : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} F_{Z_n}(x) & = & \mathbb{P}([Z_n \leqslant x]) \\ & = & \mathbb{P}([Y_n - \ln(n) \leqslant x]) \\ & = & \mathbb{P}([Y_n \leqslant x + \ln(n)]) \\ & = & F_{Y_n}(x + \ln(n)) \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))}$$

□

b) Déterminer explicitement $F_{Z_n}(x)$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question ***2.a)***, on sait que :

$$F_{Y_n}(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right.$$

Or, d'après la question ***6.a)***, $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$ et :

$$x + \ln(n) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ x \geqslant -\ln(n)$$

On distingue alors 2 cas.

- Si $x < -\ln(n)$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_{Z_n}(x) & = & F_{Y_n}(x + \ln(n)) & \\ & = & 0 & \textit{(car } x + \ln(n) < 0\textit{)} \end{array}$$

- Si $x \geqslant -\ln(n)$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_{Z_n}(x) & = & F_{Y_n}(x + \ln(n)) & \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-(x+\ln(n))}\right)^n & \textit{(car } x + \ln(n) \geqslant 0\textit{)} \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-x-\ln(n)}\right)^n & \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{e}^{-\ln(n)}\right)^n & \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\ \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln(n)}}\right)^n & \\ & = & \left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n & \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Z_n}(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < -\ln(n) \\ \left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n & \text{si } x \geqslant -\ln(n) \end{array} \right.}$$

□

c) Montrer que, pour tout réel x, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) = -\mathrm{e}^{-x}$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n} = 0$, on a l'équivalent suivant :

$$\ln\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}$$

On obtient alors :

$$n\ln\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\cancel{n}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\cancel{n}} = -\mathrm{e}^{-x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\mathrm{e}^{-x}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) = -\mathrm{e}^{-x}.}$$

□