

---

## DM1 (version B)

---

### Exercice (EDHEC 2017)

Soit  $V$  une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, dont la fonction de répartition est la fonction  $F_V$  définie par :  $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ .

On pose  $W = -\ln(V)$  et on admet que  $W$  est aussi une variable aléatoire dont la fonction de répartition est notée  $F_W$ . On dit que  $W$  suit une loi de Gumbel.

1. a) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, F_W(x) = e^{-e^{-x}}$ .

b) En déduire que  $W$  est une variable à densité.

- On désigne par  $n$  un entier naturel non nul et par  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que  $V$ , c'est à dire la loi  $\mathcal{E}(1)$ .
- On considère la variable aléatoire  $Y_n$  définie par  $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , c'est à dire que pour tout  $\omega$  de  $\Omega$ , on a :  $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$ .  
On admet que  $Y_n$  est une variable aléatoire à densité.

2. a) Montrer que la fonction de répartition  $F_{Y_n}$  de  $Y_n$  est définie par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) En déduire une densité  $f_{Y_n}$  de  $Y_n$ .

3. a) Donner un équivalent de  $1 - F_{Y_n}(t)$  lorsque  $t$  est au voisinage de  $+\infty$ , puis montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt$  est convergente.

b) Établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = x(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t) dt$$

c) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F_{Y_n}(x)) = 0$ .

d) En déduire que  $Y_n$  possède une espérance et prouver l'égalité :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) dt$$

4. a) Montrer, grâce au changement de variable  $u = 1 - e^{-t}$ , que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \int_0^{1 - e^{-x}} \frac{1 - u^n}{1 - u} du$$

b) En déduire que :  $\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) dt = \sum_{k=1}^n \frac{(1 - e^{-x})^k}{k}$  puis donner  $\mathbb{E}(Y_n)$  sous forme de somme.

5. On pose  $Z_n = Y_n - \ln(n)$ .

- a) On rappelle que `grand(1,n,'exp',1)` simule  $n$  variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1. Compléter la déclaration de fonction Scilab suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire  $Z_n$ .

```

1  function Z = f(n)
2      x = grand(1,n,'exp',1)
3      Z = ---
4  endfunction

```

b) Voici deux scripts :

```

1  V = grand(1,10000,'exp',1)
2  W = -log(V)
3  s = linspace(0,10,11)
4  histplot(s,W)

```

Script (1)

```

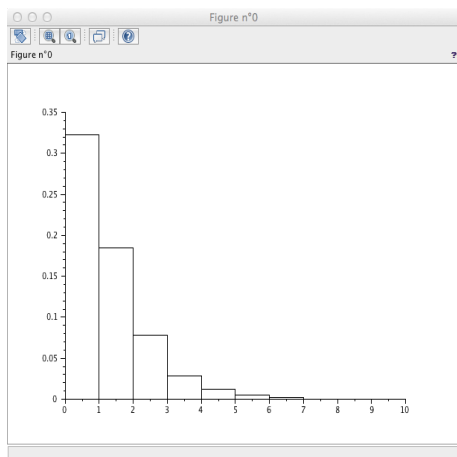
1  n = input('entrez la valeur de n : ')
2  Z = [] // la matrice-ligne Z est vide
3  for k = 1 :10000
4      Z = [Z,f(n)]
5  end
6  s = linspace(0,10,11)
7  histplot(s,Z)

```

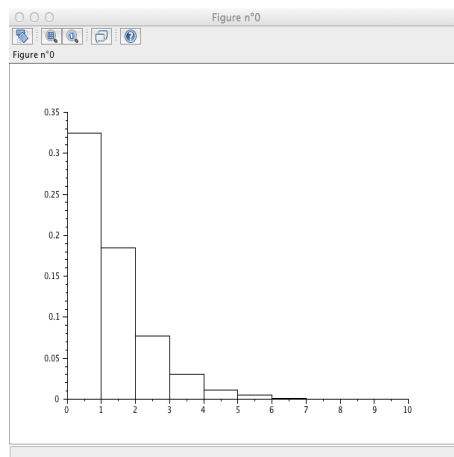
Script (2)

Chacun des scripts simule 10000 variables indépendantes, regroupe les valeurs renvoyées en 10 classes qui sont les intervalles  $[0, 1]$ ,  $]1, 2]$ ,  $]2, 3]$ ,  $\dots$ ,  $]9, 10]$  et trace l'histogramme correspondant (la largeur de chaque rectangle est égale à 1 et leur hauteur est proportionnelle à l'effectif de chaque classe).

Le script (1) dans lequel les variables aléatoires suivent la loi de Gumbel (loi suivie par  $W$ ), renvoie l'histogramme (1) ci-dessous, alors que le script (2) dans lequel les v.a.r. suivent la même loi que  $Z_n$ , renvoie l'histogramme (2) ci-dessous, pour lequel on a choisi  $n = 1000$ .



Histogramme (1)



Histogramme (2) pour  $n = 1000$

Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite des v.a.r.  $(Z_n)$  ?

6. On note  $F_{Z_n}$  la fonction de répartition de  $Z_n$ .

- a) Justifier que, pour tout réel  $x$ , on a :  $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$ .

- b) Déterminer explicitement  $F_{Z_n}(x)$ .

- c) Montrer que, pour tout réel  $x$ , on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left( 1 - \frac{e^{-x}}{n} \right) = -e^{-x}$ .

- d) Démontrer le résultat conjecturé à la question 5.b).