DM1 (version B)

Exercice (EDHEC 2017)

Soit V une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, dont la fonction de répartition est la fonction F_V définie par : $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

On pose $W = -\ln(V)$ et on admet que W est aussi une variable aléatoire dont le fonction de répartition est notée F_W. On dit que W suit une loi de Gumbel.

1. a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$.

Démonstration.

- Déterminons le support de $W = f(V)$, où $f : x \mapsto -\ln(x)$.
  La fonction F_V est nulle sur $]-\infty, 0]$, donc $V(\Omega) =]0, +\infty[$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcll} x \in V(\Omega) & \Leftrightarrow & x \in]0, +\infty[& \\ & \Leftrightarrow & 0 < x < +\infty & \\ & \Leftrightarrow & -\infty < \ln(x) < +\infty & \textit{(car la fonction } \ln \textit{ est strictement croissante)} \\ & \Leftrightarrow & +\infty > -\ln(x) > -\infty & \\ & \Leftrightarrow & +\infty > f(x) > -\infty & \\ & \Leftrightarrow & f(x) \in \mathbb{R} & \end{array}$$

  Or on sait que :

$$\begin{array}{rcll} W(\Omega) & = & f(V)(\Omega) & \\ & = & \{f(x) \mid x \in V(\Omega)\} & \\ & = & \mathbb{R} & \textit{(d'après les équivalences précédentes)} \end{array}$$

$$\boxed{W(\Omega) = \mathbb{R}}$$

- Déterminons la fonction de répartition de W.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} F_W(x) & = & \mathbb{P}([W \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([-\ln(V) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([\ln(V) \geqslant -x]) & \\ & = & \mathbb{P}([V \geqslant \mathrm{e}^{-x}]) & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante)} \\ & = & 1 - \mathbb{P}([V < \mathrm{e}^{-x}]) & \\ & = & 1 - F_V(\mathrm{e}^{-x}) & \textit{(car } V \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\ & = & \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}\right) & \textit{(car } \mathrm{e}^{-x} > 0\textit{)} \\ & = & \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}} & \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}}$$

□

b) En déduire que W est une variable à densité.

Démonstration.
La fonction de répartition F_W est :

× continue sur $\mathbb{R}$ (en tant que composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$).

× de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (en tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$).

$$\boxed{\text{Ainsi, } W \text{ est une variable à densité.}}$$

□

- On désigne par n un entier naturel non nul et par $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que V, c'est à dire la loi $\mathcal{E}(1)$.
- On considère la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, c'est à dire que pour tout ω de Ω, on a : $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$.
  On admet que Y_n est une variable aléatoire à densité.

2. a) Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est définie par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Démonstration.

- Déterminons le support de Y_n.
  Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la v.a.r. X_i suit la loi $\mathcal{E}(1)$, et donc $X_i(\Omega) = [0, +\infty[$.
  On rappelle que $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Les v.a.r. X_i étant **indépendantes**, Y_n admet pour support $Y_n(\Omega) = [0, +\infty[$.

$$\boxed{Y_n(\Omega) = [0, +\infty[}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminons la fonction de répartition de Y_n en procédant par disjonction de cas :
  – Si $x < 0$: alors $[Y_n \leqslant x] = \varnothing$. Donc, on a :

$$F_{Y_n}(x) \ = \ \mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  – Si $x \geqslant 0$.

$$\begin{array}{rcll} F_{Y_n}(x) & = & \mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([X_1 \leqslant x] \ \cap \ \cdots \ \cap [X_n \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) \times \cdots \times \mathbb{P}([X_n \leqslant x]) & \textit{(car les } X_i \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & (\mathbb{P}([X_1 \leqslant x])^n & \textit{(car les } X_i \textit{ ont même loi)} \\ & = & (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

□

b) En déduire une densité f_{Y_n} de Y_n.

Démonstration.

- Y_n est une variable à densité car :
  - × F_{Y_n} est continue sur $\mathbb{R}$.
  - × F_{Y_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0.

    En effet, sur $]-\infty, 0[$, F_{Y_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que fonction constante.
    Sur $]0, +\infty[$, F_{Y_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
- Pour déterminer une densité de Y_n, on dérive F_{Y_n} sur les **intervalles ouverts**.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - Si $x \in]-\infty, 0[$:
  $$f_{Y_n}(x) = F'_{Y_n}(x) = 0$$
  - Si $x \in]0, +\infty[$:
  $$f_{Y_n}(x) = F'_{Y_n}(x) = n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}$$
  - Si $x = 0$: on pose $f_{Y_n}(0) = 0$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

□

3. a) Donner un équivalent de $1-F_{Y_n}(t)$ lorsque t est au voisinage de $+\infty$, puis montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-F_{Y_n}(t))\ dt$ est convergente.

Démonstration.
On commence par déterminer un équivalent de $1-F_{Y_n}(t)$ quand $t \to +\infty$.

- Soit $t \geqslant 0$.
$$F_{Y_n}(t) \quad = \quad (1-\mathrm{e}^{-t})^n$$
  On reconnaît une expression de la forme $(1+x)^\alpha$ dont on connaît un développement limité (DL) à l'ordre 1 en 0 :
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
  On applique ici ce DL à $\alpha = n$ et $x = -\mathrm{e}^{-t}$, ce qui est autorisé car $\lim\limits_{t\to+\infty} -\mathrm{e}^{-t} = 0$.
  On obtient alors :
$$\begin{array}{rl} & (1-\mathrm{e}^{-t})^n = 1 - n\mathrm{e}^{-t} + \underset{t\to+\infty}{o}(\mathrm{e}^{-t}) \\ \text{d'où} & 1-(1-\mathrm{e}^{-t})^n = n\mathrm{e}^{-t} + \underset{t\to+\infty}{o}(\mathrm{e}^{-t}) \\ \text{autrement dit} & 1 - F_{Y_n}(t) = n\mathrm{e}^{-t} + \underset{t\to+\infty}{o}(\mathrm{e}^{-t}) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que : } 1 - F_{Y_n}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} n\mathrm{e}^{-t}}$$

Démontrons alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$ est convergente.

- La fonction $t \mapsto 1 - F_{Y_n}(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- D'autre part :

$$1 - F_{Y_n}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} n\ \mathrm{e}^{-t}\ (\geqslant 0)$$

- Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} n\mathrm{e}^{-t}\ dt$ est convergente (de la forme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\ dt$ avec $\alpha > 0$).
- Ainsi, par critère d'équivalence des intégrales impropres de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$ converge.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt \text{ est convergente.}}$$

Remarque

- Les intégrales de type $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\ dt$ sont considérées dans le programme comme des intégrales de référence au même titre que les intégrales de Riemann ce qui explique la rédaction ci-dessus.
- On aurait pu justifier autrement la convergence de cette intégrale.
  1) Soit par calcul.
  Soit $A \geqslant 0$.

$$\int_0^{A} n\mathrm{e}^{-t}\ dt = n \left[\ -\mathrm{e}^{-t}\ \right]_0^A = n(1 - \mathrm{e}^{-A}) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} n$$

  Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} n\mathrm{e}^{-t}\ dt$ converge.
  2) Soit par un argument provenant du chapitre des v.a.r. à densité.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ dt$ converge et vaut 1 en tant qu'intégrale d'une densité d'une v.a.r. X suivant la loi exponentielle de paramètre 1. □

b) Établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^{x} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt = x\,(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^{x} t f_{Y_n}(t)\ dt$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & 1 - F_{Y_n}(t) & \quad & u'(t) & = & -f_{Y_n}(t) \\ v'(t) & = & 1 & & v(t) & = & t \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\int_0^x 1 \times (1 - F_{Y_n}(t))\ dt &= [\ t\ (1 - F_{Y_n}(t))\ ]_0^x - \int_0^x (-f_{Y_n}(t)) \times t\ dt \\ &= x\ (1 - F_{Y_n}(x)) - \cancel{0\ (1 - F_{Y_n}(0))} + \int_0^x\ t f_{Y_n}(t)\ dt \\ &= x\ (1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x\ t f_{Y_n}(t)\ dt\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt = x(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x\ t f_{Y_n}(t)\ dt}$$

□

c) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,(1 - F_{Y_n}(x)) = 0$.

Démonstration.

- D'après la question ***3.a)***, $1 - F_{Y_n}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} n\mathrm{e}^{-x}$. On obtient alors :

$$x(1 - F_{Y_n}(x)) \underset{x \to +\infty}{\sim} nx\mathrm{e}^{-x}$$

- Or : $nx\mathrm{e}^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
  En effet, $x\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Ainsi $nx\mathrm{e}^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x(1 - F_{Y_n}(x)) = 0}$$

□

d) En déduire que Y_n possède une espérance et prouver l'égalité :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$$

Démonstration.

- La v.a.r. Y_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{Y_n}(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer de la convergence pour un calcul de moment.
  Or : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{Y_n}(t)\ dt = \int_0^{+\infty} t f_{Y_n}(t)\ dt$ car f_{Y_n} est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
- Or, d'après la question ***3.b)***, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\int_0^x t f_{Y_n}(t)\ dt = \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt - x(1 - F_{Y_n}(x)) \qquad (*)$$

  La partie droite de l'égalité admet une limite finie quand $x \to +\infty$ car :

  × l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$ converge, d'après la question ***3.a)***

  × $\lim\limits_{x \to +\infty} x(1 - F_{Y_n}(x)) = 0$, d'après la question ***3.b)***

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t f_{Y_n}(t)\ dt$ est convergente et que sa limite vérifie :

$$\int_0^{+\infty} t f_{Y_n}(t)\ dt = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt - 0$$

$$\boxed{\text{En conclusion, la v.a.r. } Y_n \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt.}$$

□

4. a) Montrer, grâce au changement de variable $u = 1 - \mathrm{e}^{-t}$, que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt = \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \frac{1-u^n}{1-u}\ du$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt = \int_0^x \left(1 - (1 - \mathrm{e}^{-t})^n\right)\ dt$$

On effectue le changement de variable $\boxed{u = \psi(t)}$, où $\psi : t \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$.

$$\left|\begin{array}{l} u = 1 - \mathrm{e}^{-t} \text{ (et donc } \mathrm{e}^{-t} = 1 - u) \\ \hookrightarrow du = \mathrm{e}^{-t}\ dt \quad \text{ et } \quad dt = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-t}}\ du = \dfrac{1}{1-u}\ du \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 0 \\ \bullet\ t = x \ \Rightarrow\ u = 1 - \mathrm{e}^{-x} \end{array}\right.$$

On remarque que $u \in [0, 1 - \mathrm{e}^{-x}]$, en particulier $u \neq 1$ (car $1 - \mathrm{e}^{-x} < 1$ pour tout $x \geqslant 0$) ce qui permet de justifier la validité de l'écriture $\dfrac{1}{1-u}$.
On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(1 - (1 - \mathrm{e}^{-t})^n\right)\ dt &= \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} (1 - u^n)\, \frac{1}{1-u}\ du \\ &= \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \frac{1-u^n}{1-u}\ du \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt = \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \frac{1-u^n}{1-u}\ du}$$

□

b) En déduire que : $\displaystyle\int_0^x \left(1 - F_{Y_n}(t)\right)\, dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^k}{k}$ puis donner $\mathbb{E}(Y_n)$ sous forme de somme.

Démonstration.

- On remarque tout d'abord que, comme $u \in [0, 1-\mathrm{e}^{-x}]$, en particulier $u \neq 1$.
  On peut donc écrire :
$$\sum_{k=0}^{n-1} u^k \;=\; \frac{1-u^n}{1-u}$$

- On obtient donc :
$$\begin{aligned}
\int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \frac{1-u^n}{1-u}\, du &= \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \sum_{k=0}^{n-1} u^k \, du \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} u^k \, du && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{u^{k+1}}{k+1} \right]_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^{k+1}}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^{k}}{k} && \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$
$$\boxed{\int_0^x \left(1 - F_{Y_n}(t)\right)\, dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^k}{k}}$$

- On sait de plus que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^k}{k} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{n} \frac{1^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} \left(1 - F_{Y_n}(t)\right)\, dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

□

5. On pose $Z_n = Y_n - \ln(n)$.

a) On rappelle que `grand(1,n,'exp',1)` simule n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1. Compléter la déclaration de fonction `Scilab` suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Z_n.

```
function Z = f(n)
    x = grand(1,n,'exp',1)
    Z = ---
endfunction
```

Démonstration.

```
    Z = max(x) - log(n)
```

Remarque

- On rappelle qu'il est inutile de recopier le programme en entier. Écrire la ligne contenant l'information manquante suffit.
- Il est tout à fait possible (et donc non sanctionné) aux concours d'utiliser plusieurs lignes, même si le concepteur a pensé à une réponse sur une seule ligne. Ici, on pouvait dans un premier temps simuler la v.a.r. Y_n puis la v.a.r. Z_n.

```
    Y = max(x)
    Z = Y - log(n)
```

□

b) Voici deux scripts :

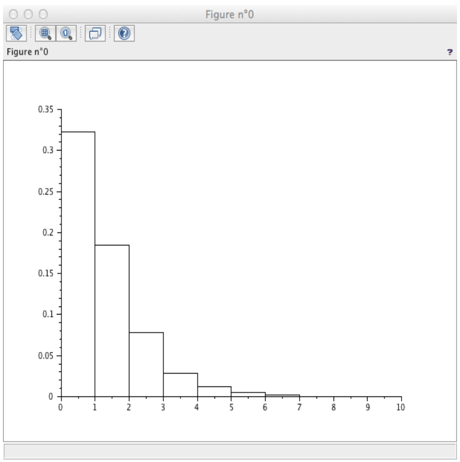
```
V = grand(1,10000,'exp',1)
W = -log(V)
s = linspace(0,10,11)
histplot(s,W)
```

Script (1)

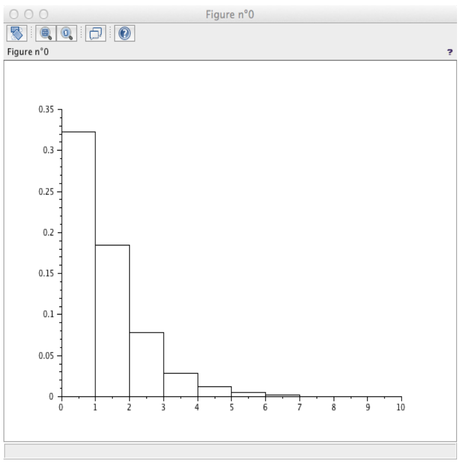
```
n = input('entrez la valeur de n : ')
Z = [] // la matrice-ligne Z est vide
for k = 1 :10000
    Z = [Z,f(n)]
end
s = linspace(0,10,11)
histplot(s,Z)
```

Script (2)

Chacun des scripts simule 10000 variables indépendantes, regroupe les valeurs renvoyées en 10 classes qui sont les intervalles $[0,1]$, $]1,2]$, $]2,3]$, $\dots$, $]9,10]$ et trace l'histogramme correspondant (la largeur de chaque rectangle est égale à 1 et leur hauteur est proportionnelle à l'effectif de chaque classe).
Le script (1) dans lequel les variables aléatoires suivent la loi de Gumbel (loi suivie par W), renvoie l'histogramme (1) ci-dessous, alors que le script (2) dans lequel les variables aléatoires suivent la même loi que Z_n, renvoie l'histogramme (2) ci-dessous, pour lequel on a choisi
$n = 1000$.



Histogramme (1)



Histogramme (2) pour $n = 1000$

Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite des v.a.r. (Z_n) ?

Démonstration.
Commentons tout d'abord l'histogramme (1).

- La ligne $\underline{1}$ et $\underline{2}$ permet d'obtenir des valeurs $(w_1, \dots, w_{10000})$ qui correspondent à l'observation d'un 10000-échantillon $(W_1, \dots, W_n)$ de la v.a.r. W qui suit la loi de Gumbel.
(les W_i sont indépendantes et ont même loi que W)
- Les lignes $\underline{3}$ et $\underline{4}$ permettent d'obtenir un histogramme des fréquences : on s'intéresse à 10 classes particulières et on compte la fréquence de chaque classe $\left(\dfrac{\text{effectif de la classe}}{\text{taille de l'observation}}\right)$.
- Afin de faire un lien plus formel avec la loi (faible) des grands nombres (LfGN), introduisons la v.a.r. T suivante.
$$\begin{array}{cccl} T & : & \Omega & \to \mathbb{R} \\ & & \omega & \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } W(\omega) \in \,]2,3] \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}$$
L'observation de cette v.a.r. fournit une approximation de $\mathbb{P}([2 < W \leqslant 3])$.
En effet, la LfGN stipule que :
$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_i \ \simeq \ \mathbb{E}(T)$$
Or T est une v.a.r. finie qui admet pour espérance :
$\mathbb{E}(T) \ = \ 1 \times \mathbb{P}([2 < W \leqslant 3]) + \cancel{0 \times \mathbb{P}([2 < W \leqslant 3])} \ = \ \mathbb{P}([2 < W \leqslant 3]) \ = \ F_W(3) - F_W(2)$
La troisième barre du graphique représente cette quantité approchée.

Commentons maintenant l'histogramme (2).

- Les lignes $\underline{3}$, $\underline{4}$, et $\underline{5}$ permettent d'obtenir les valeurs $(u_1, \dots, u_{10000})$ qui correspondent à l'observation d'un 10000-échantillon $(U_1, \dots, U_{10000})$ de la variable Z_n (pour $n = 1000$).
(les U_i sont indépendantes et ont même loi que Z_n)
- Comme expliqué au-dessus, la troisième barre du graphique est une valeur approchée de $\mathbb{P}([2 < Z_n \leqslant 3]) = F_{Z_n}(3) - F_{Z_n}(2)$.

On constate que l'histogramme (2) est très proche de l'histogramme (1). Cela signifie que les fonctions de répartitions des v.a.r. W et Z_n sont proches pour n grand.

$$\boxed{\text{On conjecture que la suite de v.a.r. } (Z_n) \text{ converge en loi vers la v.a.r. } W.}$$

Remarque
On donne ici une explication très détaillée afin qu'il y ait une bonne compréhension des mécanismes en jeu. En réalité, pour obtenir les points à cette question il suffisait d'évoquer la convergence en loi. Les 3 dernières phrases étaient donc bien suffisantes. □

6. On note F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n.

a) Justifier que, pour tout réel x, on a : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{array}{rcl} F_{Z_n}(x) & = & \mathbb{P}([Z_n \leqslant x]) \\ & = & \mathbb{P}([Y_n - \ln(n) \leqslant x]) \\ & = & \mathbb{P}([Y_n \leqslant x + \ln(n)]) \\ & = & F_{Y_n}(x + \ln(n)) \end{array}$$
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))}$$
□

b) Déterminer explicitement $F_{Z_n}(x)$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question ***2.a)***, on sait que :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Or, d'après la question ***6.a)***, $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$ et :

$$x + \ln(n) \geqslant 0 \iff x \geqslant -\ln(n)$$

On distingue alors 2 cas.

- Si $x < -\ln(n)$, alors :

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(x) &= F_{Y_n}(x + \ln(n)) \\ &= 0 && \textit{(car } x + \ln(n) < 0\textit{)} \end{aligned}$$

- Si $x \geqslant -\ln(n)$, alors :

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(x) &= F_{Y_n}(x + \ln(n)) \\ &= \left(1 - \mathrm{e}^{-(x+\ln(n))}\right)^n && \textit{(car } x + \ln(n) \geqslant 0\textit{)} \\ &= \left(1 - \mathrm{e}^{-x-\ln(n)}\right)^n \\ &= \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{e}^{-\ln(n)}\right)^n \\ &= \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\ \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(n)}}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln(n) \\ \left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n & \text{si } x \geqslant -\ln(n) \end{cases}}$$

□

c) Montrer que, pour tout réel x, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) = -\mathrm{e}^{-x}$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n} = 0$, on a l'équivalent suivant :

$$\ln\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}$$

On obtient alors :

$$n \ln\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\cancel{n}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\cancel{n}} = -\mathrm{e}^{-x} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\mathrm{e}^{-x}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \lim_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) = -\mathrm{e}^{-x}.}$$

□

d) Démontrer le résultat conjecturé à la question ***5.b)***.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer que la suite (Z_n) converge en loi vers la v.a.r. W. Autrement, il faut démontrer qu'en tout point de continuité de F_W, *i.e.* pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} F_{Z_n}(x) = F_W(x)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- D'après la question ***6.c)***, $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$.
  La fonction $u \mapsto \exp(u)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, on a, par composition de limites :
  $$\lim_{n \to +\infty} \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)\right) = \exp\left(-e^{-x}\right)$$
  $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n = e^{-e^{-x}}}$$
- De plus, comme le réel x est fixé et que $-\ln(n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
  $$\forall n \geqslant n_0, \ x \geqslant -\ln(n)$$
  Considérons maintenant $n \geqslant n_0$ (ce qui est autorisé car on cherche une limite quand n tend vers $+\infty$). On a alors :
  $$F_{Z_n}(x) = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-e^{-x}}$$
  On en déduit que :
  $$\lim_{n \to +\infty} F_{Z_n}(x) = F_W(x)$$

$$\boxed{\text{La suite de v.a.r. } (Z_n) \text{ converge en loi vers la v.a.r. } W.}$$

□