
DM2 (version A)

Exercice (ECRICOME 2003)

On considère les fonctions ch et sh définies sur \mathbb{R} par :

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ainsi que la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\operatorname{sh}(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On s'intéresse dans cet exercice à la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Partie I : Étude des fonctions sh et f

1. Dresser le tableau de variations de la fonction sh , puis en déduire le signe de $\operatorname{sh}(x)$ pour x appartenant à \mathbb{R} .
2. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\operatorname{sh}(x)$.
3. Montrer que la fonction sh réalise une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
4. Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
On admettra dans la suite que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et que $f'(0) = 0$.
5. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, h(x) = \operatorname{sh}(x) - x \operatorname{ch}(x)$$

Étudier les variations de h , puis en déduire le signe de $h(x)$.

6. Déterminer les variations de f sur \mathbb{R}_+ , puis sur \mathbb{R} .

Partie II : Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On donne :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{4}{5}\right) &\simeq 0.9, & f(1) &\simeq 0.85, \\ \operatorname{sh}\left(\frac{3}{5}\right) &\simeq 0.64, & \operatorname{sh}\left(\frac{4}{5}\right) &\simeq 0.89, & \operatorname{sh}(1) &\simeq 1.18, & \operatorname{sh}\left(\frac{6}{5}\right) &\simeq 1.51 \end{aligned}$$

7. Justifier que $f\left(\left[\frac{4}{5}, 1\right]\right) \subset \left[\frac{4}{5}, 1\right]$, puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$$

8. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur \mathbb{R} .
(on pourra utiliser la question 1.3, sans chercher à déterminer α)

9. Donner un encadrement de α et justifier que :

$$\forall x \in \left[\frac{4}{5}, 1 \right], \quad \frac{h(1)}{\operatorname{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \leq f'(x) \leq \frac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\operatorname{sh}^2(1)}$$

10. On donne : $\frac{h(1)}{\operatorname{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \simeq -0.47$ et $\frac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\operatorname{sh}^2(1)} \simeq -0.13$.

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

Puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

11. En déduire la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

12. Écrire un programme en **Scilab** permettant de calculer et d'afficher u_{10} .

13. a) Déterminer un entier n_0 à partir duquel : $|u_n - \alpha| \leq 10^{-4}$.

b) Déduire de cette inégalité un programme **Scilab** permettant de déterminer une valeur approchée de α à 10^{-4} près.