DM2 (version A)

Exercice (ECRICOME 2003)

On considère les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{ch}\,(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ainsi que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{sh}\,(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On s'intéresse dans cet exercice à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f\,(u_n) \end{cases}$$

Partie I : Étude des fonctions sh et f

1. Dresser le tableau de variations de la fonction sh, puis en déduire le signe de $\mathrm{sh}\,(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- Le fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Déterminons sa dérivée. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}'(x) &= \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x) \end{aligned}$$

Or $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$. Donc $\mathrm{sh}'(x) > 0$.
On obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $\mathrm{sh}'(x)$		$+$		$+$	
Variations de sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de $\mathrm{sh}(x)$		$-$	0	$+$	

- Détaillons l'obtention de la dernière ligne du tableau.
La fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi :
  - $\times$ pour tout $x < 0$, $\mathrm{sh}(x) < \mathrm{sh}(0) = 0$,
  - $\times$ pour tout $x > 0$, $\mathrm{sh}(x) > \mathrm{sh}(0) = 0$.

□

2. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\text{sh}(x)$.
En déduire l'allure de la courbe représentative de la fonction sh en $+\infty$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Déterminons un équivalent de $\text{sh}(x)$ en $+\infty$.

$$\begin{aligned} \text{sh}(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\, e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{e^x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\, e^x \left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{\text{sh}(x)}{\frac{e^x}{2}} = 1 - \frac{1}{e^{2x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - 0 = 1$$

$$\boxed{\text{sh}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}}$$

$$\boxed{\text{Comme } \frac{e^x}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty, \text{ on en déduit que : } \lim_{x\to+\infty} \text{sh}(x) = +\infty.}$$

Remarque

- Trouver l'équivalent de la fonction sh en $+\infty$, c'est trouver le terme prépondérant (en $+\infty$) dans l'expresion de la fonction sh.
- Dans la rédaction précédente, on a mis $\dfrac{e^x}{2}$ en facteur. On a identifié ce terme comme étant le terme prépondérant de la somme. Autrement dit, les autres termes de la somme sont petits devant lui. On pouvait donc rédiger cette question en écrivant :

$$e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o\,(e^x) \quad \text{puisque} \quad \frac{e^{-x}}{e^x} = \frac{1}{e^{2x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

3. Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration.
La fonction sh est :

× continue sur $]-\infty, +\infty[$

× strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$, d'après la question *2.*

Ainsi, sh réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $\text{sh}(]-\infty, +\infty[)$. Or :

$$\text{sh}(]-\infty, +\infty[) = \left] \lim_{x\to-\infty} \text{sh}(x), \lim_{x\to+\infty} \text{sh}(x) \right[=]-\infty, +\infty[$$

$$\boxed{\text{La fonction sh réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$$

□

4. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
On admettra dans la suite que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) = 0$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas ($\mathrm{sh}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$).
Par le même raisonnement, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et sur } \mathbb{R}_-^*.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times \mathrm{sh}(x) - x \times \mathrm{sh}'(x)}{(\mathrm{sh}(x))^2} \\ &= \frac{\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)}{(\mathrm{sh}(x))^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)}{(\mathrm{sh}(x))^2}.}$$

□

5. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ h(x) = \mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)$.
Étudier les variations de h, puis en déduire le signe de $h(x)$.

Démonstration.

- La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$h'(x) = \cancel{\mathrm{ch}(x)} - (\cancel{\mathrm{ch}(x)} + x\,\mathrm{sh}(x)) = -x\,\mathrm{sh}(x)$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $-x$		$+$	0	$-$	
Signe de $\mathrm{sh}(x)$		$-$	0	$+$	
Signe de $h'(x)$		$-$	0	$-$	
Variations de h	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
Signe de $h(x)$		$+$	0	$-$	

- Détaillons l'obtention de la dernière ligne du tableau.
La fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi :
  - × pour tout $x < 0$, $h(x) > h(0) = 0$,
  - × pour tout $x > 0$, $h(x) < h(0) = 0$.

□

6. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}_+$, puis sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- D'après la question ***11.***, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{h(x)}{(\text{sh}(x))^2}$$

Or $(\text{sh}(x))^2 > 0$. On en déduit que $f'(x)$ est du signe de $h(x)$.
On en déduit, à l'aide de la question précédente, le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

□

Partie II : Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On donne :

$$f\left(\tfrac{4}{5}\right) \simeq 0.9, \qquad f(1) \simeq 0.85,$$
$$\text{sh}\left(\tfrac{3}{5}\right) \simeq 0.64, \quad \text{sh}\left(\tfrac{4}{5}\right) \simeq 0.89, \quad \text{sh}(1) \simeq 1.18, \quad \text{sh}\left(\tfrac{6}{5}\right) \simeq 1.51$$

7. Justifier que $f\left(\left[\frac{4}{5}, 1\right]\right) \subset \left[\frac{4}{5}, 1\right]$, puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$$

Démonstration.

- La fonction f est :
  × continue sur l'intervalle $\left[\frac{4}{5}, 1\right]$,
  × strictement décroissante sur $\left[\frac{4}{5}, 1\right]$.

  Ainsi :

$$f\left(\left[\tfrac{4}{5}, 1\right]\right) \;=\; \left[f(1), f\left(\tfrac{4}{5}\right)\right] \;\simeq\; [0.85, 0.9] \;\subset\; \left[\tfrac{4}{5}, 1\right]$$

$$\boxed{f\left(\left[\tfrac{4}{5}, 1\right]\right) \subset \left[\tfrac{4}{5}, 1\right]}$$

- Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$.
  ▸ **Initialisation** :
  $u_0 = 1 \in [\frac{4}{5}, 1]$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
  ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \in [\frac{4}{5}, 1]$).
  Par hypothèse de récurrence : $u_n \in [\frac{4}{5}, 1]$.
  Or : $f\left(\left[\frac{4}{5}, 1\right]\right) \subset \left[\frac{4}{5}, 1\right]$. On en déduit que : $u_{n+1} = f(u_n) \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$.
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\tfrac{4}{5}, 1\right].}$$

□

8. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
*(on pourra utiliser la question **3.**, sans chercher à déterminer α)*

Démonstration.

- 0 n'est pas solution de l'équation $f(x) = x$. En effet, $f(0) = 1 \neq 0$.
- Soit $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = x \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{x}{\mathrm{sh}(x)} = x \\ & \Leftrightarrow \quad x = x \ \mathrm{sh}(x) \\ & \Leftrightarrow \quad 1 = \mathrm{sh}(x) \qquad \textit{(car } x \neq 0\textit{)} \end{aligned}$$

D'après la question ***4.***, la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Or $1 \in \mathbb{R}$, donc l'équation $\mathrm{sh}(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'équation } f(x) = x \text{ admet une unique solution } \alpha \in \mathbb{R}.}$$

□

9. Donner un encadrement de α et justifier que :

$$\forall x \in [\tfrac{4}{5}, 1], \quad \frac{h(1)}{(\mathrm{sh}\left(\frac{4}{5}\right))^2} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{(\mathrm{sh}(1))^2}$$

Démonstration.

- Tout d'abord :
  - × $\mathrm{sh}(\frac{4}{5}) \simeq 0.89$,
  - × $\mathrm{sh}(\alpha) = 1$ d'après la question précédente,
  - × $\mathrm{sh}(1) \simeq 1.18$.

  On en déduit que :

$$\mathrm{sh}\left(\frac{4}{5}\right) \leqslant \mathrm{sh}(\alpha) \leqslant \mathrm{sh}(1)$$

  Or, d'après le théorème de la bijection, la fonction $\mathrm{sh}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante.
  En appliquant sh^{-1} de part et d'autre de l'inégalité, on obtient :

$$\boxed{\frac{4}{5} \leqslant \alpha \leqslant 1}$$

- Soit $x \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$. Tout d'abord :

$$\frac{4}{5} \leqslant x \leqslant 1$$

$$\begin{array}{lcl} \text{donc} & \mathrm{sh}(\frac{4}{5}) \leqslant \mathrm{sh}(x) \leqslant \mathrm{sh}(1) & \textit{(par croissance de la fonction sh)} \\ \text{et} & (\mathrm{sh}(\frac{4}{5}))^2 \leqslant (\mathrm{sh}(x))^2 \leqslant (\mathrm{sh}(1))^2 & \textit{(par croissance de la fonction élévation au carré sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\ \text{ainsi} & \dfrac{1}{(\mathrm{sh}(\frac{4}{5}))^2} \geqslant \dfrac{1}{(\mathrm{sh}(x))^2} \geqslant \dfrac{1}{(\mathrm{sh}(1))^2} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \end{array}$$

  Par ailleurs, par décroissance de la fonction h :

$$h(\tfrac{4}{5}) \geqslant h(x) \geqslant h(1)$$

Enfin, comme $h(\frac{4}{5}) \leqslant h(0) = 0$:

$$-h(1) \geqslant -h(x) \geqslant -h(\tfrac{4}{5}) \geqslant 0$$

Les quantités en présence étant toutes positives, on en déduit, en multipliant ces inégalités membre à membre :

$$-\frac{h\,(1)}{(\mathrm{sh}\,(\frac{4}{5}))^2} \quad \geqslant \quad -\frac{h(x)}{(\mathrm{sh}(x))^2} \quad \geqslant \quad -\frac{h\,(\frac{4}{5})}{(\mathrm{sh}(1))^2}$$

$$\text{donc} \qquad \frac{h\,(1)}{(\mathrm{sh}\,(\frac{4}{5}))^2} \quad \leqslant \quad \underbrace{\frac{h(x)}{(\mathrm{sh}(x))^2}}_{= f'(x)} \quad \leqslant \quad \frac{h\,(\frac{4}{5})}{(\mathrm{sh}(1))^2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \left[\tfrac{4}{5}, 1\right],\ \frac{h\,(1)}{\mathrm{sh}^2\,(\frac{4}{5})} \leqslant f'\,(x) \leqslant \frac{h\,(\frac{4}{5})}{\mathrm{sh}^2\,(1)}.}$$

□

10. On donne : $\dfrac{h\,(1)}{\mathrm{sh}^2\,(\frac{4}{5})} \simeq -0.47$ et $\dfrac{h\,(\frac{4}{5})}{\mathrm{sh}^2\,(1)} \simeq -0.13$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$.

Puis que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout $x \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \dfrac{h\,(1)}{\mathrm{sh}^2\,(\frac{4}{5})} & \leqslant & f'(x) & \leqslant & \dfrac{h\,(\frac{4}{5})}{\mathrm{sh}^2\,(1)} & & \\ & & \wr\!\mid & & & & \wr\!\mid & & \\ -\frac{1}{2} & \leqslant & -0.47 & & & & -0.12 & \leqslant & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \forall x \in \left[\tfrac{4}{5}, 1\right],\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}.}$$

- D'après les questions précédentes :
  × f est dérivable sur $\left[\frac{4}{5}, 1\right]$,
  × $\forall x \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$

  Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in \left[\tfrac{4}{5}, 1\right]^2,\ |f(y) - f(x)| \ \leqslant\ \frac{1}{2}\ |y - x|$$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$ et $x = \alpha \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$, on obtient :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

  Enfin, comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(\alpha) = \alpha$, on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|}$$

- Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
  - **Initialisation** :
    $|u_0 - \alpha| \leqslant \frac{1}{5}$ car u_0 et α sont des éléments de $\left[\frac{4}{5}, 1\right]$, intervalle de largeur $\frac{1}{5}$.
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$).

$$\begin{array}{rcll} |u_{n+1} - \alpha| & \leqslant & \dfrac{1}{2}\,|u_n - \alpha| & \textit{(d'après le point précédent)} \\ & \leqslant & \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & \leqslant & \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n.}$$

$\square$

11. En déduire la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration.

- Comme $\dfrac{1}{2} \in]-1, 1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.
- On en déduit, par le théorème d'encadrement, que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n - \alpha = 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } (u_n) \text{ est convergente, de limite } \lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha.}$$

$\square$

12. Écrire un programme en **Scilab** permettant de calculer et d'afficher u_{10}.

Démonstration.

```
u = 1
for i = 1:10
    u = u / ( (exp(u) - exp(-u)) / 2 )
end
disp(u)
```

$\square$

13. ***a)*** Déterminer un entier n_0 à partir duquel : $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-4}$.

Démonstration.
Pour que cette inégalité soit vérifiée, il suffit de trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-4}$.
En effet, d'après la question ***17.***, on aura alors, par transitivité :

$$|\ u_n - \alpha\ | \ \leqslant\ \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n \ \leqslant\ 10^{-4}$$

Déterminons donc un entier n_0 à partir duquel : $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-4}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-4} \quad & \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 5.10^{-4} \\
& \Leftrightarrow \quad n\ln(\tfrac{1}{2}) \leqslant \ln(5) + \ln(10^{-4}) && \textit{(car la fonction } \ln \textit{ est strictement croissante)} \\
& \Leftrightarrow \quad -n\ln(2) \leqslant \ln(5) - 4\ln(10) \\
& \Leftrightarrow \quad n \geqslant \frac{\ln(5) - 4\ln(10)}{-\ln(2)} && \textit{(car } -\ln(2) < 0\textit{)}
\end{aligned}$$

Tout entier plus grand que :

$$\frac{\ln(5) - 4\ln(10)}{-\ln(2)} = \frac{\ln(5) - 4\ln(2) - 4\ln(5)}{-\ln(2)} = \frac{3\ln(5) + 4\ln(2)}{\ln(2)}$$

convient. On choisit alors : $n_0 = \left\lceil \frac{3\ln(5) + 4\ln(2)}{\ln(2)} \right\rceil$.

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \alpha| \leqslant 10^{-4}}$$

Remarque

On aurait aussi pu choisir $n_0 = \left\lfloor \frac{3\ln(5) + 4\ln(2)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1$.

□

b) Déduire de cette inégalité un programme **Scilab** permettant de déterminer une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

Démonstration.
D'après l'inégalité précédente, u_{n_0} est une valeur de α à 10^{-4} près.
On en déduit le programme suivant.

```
n = ceil( (3 * log(5) + 4 * log(2)) / log(2) )
u = 1
for i = 1:n
    u = u / ( (exp(u) - exp(-u)) / 2 )
end
disp(u)
```

□