# DM2 (version B)

## Exercice (ECRICOME 2003)

On considère les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ainsi que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\operatorname{sh}(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On s'intéresse dans cet exercice à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \ \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

### Partie I : Étude des fonctions ch, sh, et $f$

***1.*** Étudier la parité des fonctions ch et sh.

***2.*** Dresser le tableau de variations de la fonction sh, puis en déduire le signe de $\operatorname{sh}(x)$ pour $x$ appartenant à $\mathbb{R}$.

***3.*** Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\operatorname{sh}(x)$.
En déduire l'allure de la courbe représentative de la fonction sh en $+\infty$.

***4.*** Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

***5.*** Étudier les variations de la fonction ch.

***6.*** Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \operatorname{ch}(x) > \operatorname{sh}(x)$$

***7.*** Donner sur un même graphique l'allure des courbes représentatives des fonctions ch et sh.

***8.*** Étudier la parité de la fonction $f$.

***9.*** Montrer que le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fontion sh est :

$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

***10.*** En déduire que la fonction $f$ est continue en 0, dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

***11.*** Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

***12.*** On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ h(x) = \text{sh}(x) - x\,\text{ch}(x)$$

Étudier les variations de $h$, puis en déduire le signe de $h(x)$.

***13.*** Déterminer les variations de $f$ sur $\mathbb{R}^+$ et donner l'allure de la courbe représentative de la fonction $f$. *(on ne cherchera pas les points d'inflexion)*

### Partie II : Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On donne :

$$f\left(\tfrac{4}{5}\right) \simeq 0.9, \qquad f(1) \simeq 0.85,$$

$$\text{sh}\left(\tfrac{3}{5}\right) \simeq 0.64, \quad \text{sh}\left(\tfrac{4}{5}\right) \simeq 0.89, \quad \text{sh}(1) \simeq 1.18, \quad \text{sh}\left(\tfrac{6}{5}\right) \simeq 1.51$$

***14.*** Justifier que $f\left(\left[\frac{4}{5}, 1\right]\right) \subset \left[\frac{4}{5}, 1\right]$, puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$$

***15.*** Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}$.
*(on pourra utiliser la question **1.4**, sans chercher à déterminer $\alpha$)*

***16.*** Donner un encadrement de $\alpha$ et justifier que :

$$\forall x \in \left[\frac{4}{5}, 1\right],\ \frac{h(1)}{\text{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\text{sh}^2(1)}$$

***17.*** On donne : $\dfrac{h(1)}{\text{sh}^2\left(\frac{4}{5}\right)} \simeq -0.47$ et $\dfrac{h\left(\frac{4}{5}\right)}{\text{sh}^2(1)} \simeq -0.13$.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$$

Puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

***18.*** En déduire la limite de la suite $(u_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

***19.*** Écrire un programme en **Scilab** permettant de calculer et d'afficher $u_{10}$.

***20.*** ***a)*** Déterminer un entier $n_0$ à partir duquel : $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-4}$.

***b)*** Déduire de cette inégalité un programme **Scilab** permettant de déterminer une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-4}$ près.