DM3 (version A)

Exercice (d'après EML 2016)

On note I et A les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

et $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par : $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \ ; \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

PARTIE I : Étude de la matrice A

1. Calculer A^2.

2. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.

3. ***a)*** Justifier, sans calcul, que la matrice A n'est pas inversible.

b) i. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\text{rg}(A - \lambda I) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \notin \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$$

ii. Montrer que l'ensemble $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = \sqrt{2}X\}$ est un espace vectoriel et en déterminer une base. En déduire sa dimension.

iii. Même question pour les ensembles $G = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 0\}$ et $H = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = -\sqrt{2}X\}$.

iv. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

v. Montrer que $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

4. Montrer : $A^3 = 2A$.

PARTIE II : Étude d'une application définie sur $\mathcal{E}$

5. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que la famille (I, A, A^2) est une base de $\mathcal{E}$. En déduire la dimension de $\mathcal{E}$.

6. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, la matrice AM appartient à $\mathcal{E}$.

On note f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à toute matrice M de $\mathcal{E}$, associe AM.

7. Montrer que pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $(M, N) \in \mathcal{E}^2$, $f(\lambda M + \mu N) = \lambda f(M) + \mu f(N)$.

8. Exprimer $f(I)$, $f(A)$ et $f(A^2)$ en fonction des matrices I, A et A^2.

9. Soit $M \in \mathcal{E}$. En utilisant la question ***4.***, montrer que : $(f \circ f \circ f)(M) = 2f(M)$.

10. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.