DM3 (version A)

Exercice `(d'après EML 2016)`

On note I et A les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

PARTIE I : Étude de la matrice A

1. Calculer A^2.

Démonstration.

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

□

2. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.

Démonstration.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
Supposons $\lambda_1 I + \lambda_2 A + \lambda_3 A^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Ceci équivaut à :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_1 + 2\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui se réécrit sous forme de système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\boxed{\text{La famille } (I, A, A^2) \text{ est libre.}}$$

□

3. ***a)*** Justifier, sans calcul, que la matrice A n'est pas inversible.

Démonstration.
$A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, donc A est inversible si et seulement si $\text{rg}(A) = 3$. Or :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \ < \ 3 \ \text{ car } C_1 = C_3$$

$$\boxed{A \text{ est non inversible.}}$$

Remarque

- On utilise ici la définition du rang d'une matrice :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

- En utilisant la propriété $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$, on peut aussi justifier que $\mathrm{rg}(A) < 3$ car $L_1 = L_3$. □

b) i. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\mathrm{rg}(A - \lambda I) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \notin \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$$

Démonstration.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A - \lambda I) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1 & -\lambda\end{pmatrix}\right)\\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & -\lambda & 1\\ -\lambda & 1 & 0\\ 0 & 1 & -\lambda\end{pmatrix}\right)\\
&\overset{L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda\\ 0 & 1 & -\lambda\end{pmatrix}\right)\\
&\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1 & -\lambda\\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda\end{pmatrix}\right)\\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda^2) L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1 & -\lambda\\ 0 & 0 & \lambda + \lambda(1-\lambda^2)\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure. Elle est non inversible (*i.e.* de rang strictement inférieur à 3) si l'un de ses cœfficients diagonaux est nul.
Autrement dit si : $\lambda + \lambda(1 - \lambda^2) = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
A - \lambda I \text{ non inversible} &\Leftrightarrow \lambda + \lambda(1 + \lambda^2) = 0\\
&\Leftrightarrow \lambda(2 - \lambda^2) = 0\\
&\Leftrightarrow \lambda \in \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{rg}(A - \lambda I) = 3 \ \Leftrightarrow\ \lambda \notin \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}}$$

Remarque

- On cherche ici à déterminer les *valeurs propres de* A, c'est-à-dire les réels λ tels que $A - \lambda I$ n'est pas inversible (ce qui équivaut bien à $\text{rg}(A - \lambda I) < 3$).
- Dans la plupart des sujets, on demande simplement de vérifier que certains réels sont valeurs propres de A. La question aurait pu être tournée sous la forme suivante :

  « Montrer que $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$ sont des valeurs propres de A. »

  Dans ce cas, il est inutile de faire le calcul de rang précédent avec λ quelconque.
  Il faut au contraire faire le calcul du rang pour les valeurs de λ fournies par l'énoncé.
  Plus précisément :

  × cas $\lambda = \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
\text{rg}(A - \sqrt{2}\ I) &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_2 \leftarrow \sqrt{2}\ L_2 + L_1}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\right) \\
&= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) < 3
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \sqrt{2} \text{ est une valeur propre de } A.}$$

  × cas $\lambda = 0$:

$$\text{rg}(A - 0\ I) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) < 3$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } 0 \text{ est une valeur propre de } A.}$$

  × cas $\lambda = -\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
\text{rg}(A - (-\sqrt{2})\ I) &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_2 \leftarrow \sqrt{2}\ L_2 - L_1}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\right) \\
&= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) < 3
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } -\sqrt{2} \text{ est une valeur propre de } A.}$$

□

ii. Montrer que l'ensemble $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \sqrt{2}X\}$ est un espace vectoriel et en déterminer une base. En déduire sa dimension.

Démonstration.
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in F & \Longleftrightarrow & AX = \sqrt{2}X \\
& \Longleftrightarrow & (A - \sqrt{2}I)\ X = 0 \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\sqrt{2}\,x & + & y & & & = & 0 \\ x & - & \sqrt{2}\,y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & \sqrt{2}\,y & + & z & = & 0 \\ -\sqrt{2}\,x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 + \sqrt{2}L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & \sqrt{2}\,y & + & z & = & 0 \\ & - & y & + & \sqrt{2}\,z & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & \sqrt{2}\,y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & \sqrt{2}\,y & = & -z \\ & & y & = & \sqrt{2}\,z \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 + \sqrt{2}\,L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & \sqrt{2}\,z \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl}
F & = & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \ \text{ et } \ y = \sqrt{2}\,z\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} z \\ \sqrt{2}\,z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
& = & \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est :

× génératrice de F,

× libre car constituée d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } F.}$$

$$\boxed{\text{Enfin, comme cette famille possède un seul vecteur, } \dim(F) = 1.}$$

□

iii. Même question pour les ensembles :

$$G = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\} \quad \text{et} \quad H = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -\sqrt{2}X\}$$

Démonstration.
Commençons par l'étude de G.
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
X \in G \iff & AX = 0 \\
\iff & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & & & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{rcrcl} x & & & = & -z \\ & & y & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
G &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \ \text{ et } \ y = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est :

- × génératrice de G,
- × libre car constituée d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } G.}$$

$$\boxed{\text{Enfin, comme cette famille possède un seul vecteur, } \dim(G) = 1.}$$

Étudions maintenant l'ensemble H.
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in H & \iff & AX = -\sqrt{2}\, x \\
& \iff & (A + \sqrt{2}I)\ X = 0 \\
& \iff & \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \sqrt{2}\, x & + & y & & & = & 0 \\ x & + & \sqrt{2}\, y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\, z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & \sqrt{2}\, y & + & z & = & 0 \\ \sqrt{2}\, x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\, z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 - \sqrt{2} L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & \sqrt{2}\, y & + & z & = & 0 \\ & - & y & - & \sqrt{2}\, z & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\, z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & \sqrt{2}\, y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\, z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & \sqrt{2}\, y & = & -\, z \\ & & y & = & -\sqrt{2}\, z \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 - \sqrt{2}\, L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & z \\ & & y & = & -\sqrt{2}\, z \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} H &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \ \text{ et } \ y = -\sqrt{2}\, z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -\sqrt{2}\, z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

× génératrice de H,

× libre car constituée d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } H.}$$

$$\boxed{\text{Enfin, comme cette famille possède un seul vecteur, } \dim(H) = 1.}$$

□

iv. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Démonstration.
On applique la méthode du pivot de Gauss.

$$\left.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + \sqrt{2} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right.$. On obtient alors :

$$\left.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\right| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On effectue l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow L_3 + \sqrt{2} L_2 \right.$. On obtient :

$$\left.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls.
Elle est donc inversible et P est elle aussi inversible.

On effectue les opérations $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow 4L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow \sqrt{2}L_1 - L_3 \end{array}\right.$. On obtient alors

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \right.$. On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3 \end{array}\right.$. On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.}$$

☐

v. Montrer que $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= \frac{1}{4}P\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

☐

4. Montrer : $A^3 = 2A$.

Démonstration.

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2A$$

$$\boxed{A^3 = 2A}$$

☐

PARTIE II : Étude d'une application définie sur $\mathcal{E}$

5. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que la famille (I, A, A^2) est une base de $\mathcal{E}$. En déduire la dimension de $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- Montrons que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ aI + bA + cA^2 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(I, A, A^2\right)\end{aligned}$$

  De plus, $(I, A, A^2) \in (\mathscr{M}_3(\mathbb{R}))^3$.

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

- La famille (I, A, A^2) est :
  - × génératrice de $\mathcal{E}$,
  - × libre d'après la question ***2.***

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } (I, A, A^2) \text{ est une base de } \mathcal{E}.}$$

$$\boxed{\text{Enfin, comme } (I, A, A^2) \text{ est constituée de 3 vecteurs, } \dim(\mathcal{E}) = 3}$$

□

6. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, la matrice AM appartient à $\mathcal{E}$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{E}$.
D'après la question précédente, $\mathcal{E} = \mathrm{Vect}\left(I, A, A^2\right)$.
Il existe donc $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que : $M = aI + bA + cA^2$. Ainsi :

$$\begin{aligned}AM &= A(a \cdot I + b \cdot A + c \cdot A^2) \\ &= a \cdot A + b \cdot A^2 + c \cdot A^3 \\ &= a \cdot A + b \cdot A^2 + 2c \cdot A \qquad \textit{(d'après la question 4.)} \\ &= (a+2c) \cdot A + b \cdot A^2\end{aligned}$$

Or : $(a+2c) \cdot A + b \cdot A^2 \in \mathrm{Vect}\left(A, A^2\right) \subset \mathrm{Vect}\left(I, A, A^2\right) = \mathcal{E}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } M \in \mathcal{E},\ AM \in \mathcal{E}.}$$

□

On note f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à toute matrice M de $\mathcal{E}$, associe AM.

7. Montrer que pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $(M, N) \in \mathcal{E}^2$, $f(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) = \lambda \cdot f(M) + \mu \cdot f(N)$.

Démonstration.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M, N) \in \mathcal{E}^2$.

$$f(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) = A(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) = \lambda \cdot AM + \mu \cdot AN = \lambda \cdot f(M) + \mu \cdot f(N)$$

$$\boxed{\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (M, N) \in \mathcal{E}^2,\ f(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) = \lambda \cdot f(M) + \mu \cdot f(N)}$$

□

8. Exprimer $f(I)$, $f(A)$ et $f(A^2)$ en fonction des matrices I, A et A^2.

Démonstration.

$$\boxed{f(I) = A,\ f(A) = A^2 \text{ et } f(A^2) = A^3 = 2A}$$

Remarque
L'objectif de ce type de question est de déterminer les coordonnées de $f(I)$, $f(A)$ et $f(A^2)$ dans la base (I, A, A^2) de $\mathcal{E}$. Ici, on a :

$$\begin{array}{rcccl} f(I) & = & A & = & 0 \cdot 1 + 1 \cdot A + 0 \cdot A^2 \\ f(A) & = & A^2 & = & 0 \cdot 1 + 0 \cdot A + 1 \cdot A^2 \\ f(A^2) & = & 2A & = & 0 \cdot 1 + 2 \cdot A + 0 \cdot A^2 \end{array}$$

Ainsi, dans la base (I, A, A^2) :
× $f(I)$ a pour coordonnées $(0, 1, 0)$.
× $f(A)$ a pour coordonnées : $(0, 0, 1)$.
× $f(A^2)$ a pour coordonnées : $(0, 2, 0)$.

□

9. Soit $M \in \mathcal{E}$. En utilisant la question ***4.***, montrer que :

$$(f \circ f \circ f)(M) = 2f(M)$$

Démonstration.

$$\begin{array}{rcl} (f \circ f \circ f)(M) & = & f(f(f(M))) = f(f(AM)) = f(A \times AM) = f(A^2 M) \\ & = & A \times A^2 M = A^3 M = 2AM = 2f(M) \end{array}$$

$$\boxed{(f \circ f \circ f)(M) = 2f(M)}$$

□

10. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Démonstration.
La famille (I, A, A^2) étant une base de $\mathcal{E}$:

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(I), f(A), f(A^2)\right) = \mathrm{Vect}\left(A, A^2, 2A\right) = \mathrm{Vect}\left(A, A^2\right)$$

La famille (A, A^2) est :
× génératrice de $\mathrm{Im}(f)$,
× libre car constituée de 2 matrices non colinéaires.

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } (A, A^2) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f).}$$

□