
DM3 (version B)

Exercice (EML 2016)

On note I et A les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et \mathcal{E} l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} ; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

PARTIE I : Étude de la matrice A

1. Calculer A^2 .
2. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.
3.
 - a) Justifier, sans calcul, que A est diagonalisable.
 - b) Déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 et une matrice D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant telles que : $A = PDP^{-1}$.
4. Montrer : $A^3 = 2A$.

PARTIE II : Étude d'une application définie sur \mathcal{E}

5. Montrer que \mathcal{E} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que la famille (I, A, A^2) est une base de \mathcal{E} .
En déduire la dimension de \mathcal{E} .
6. Montrer que, pour toute matrice M de \mathcal{E} , la matrice AM appartient à \mathcal{E} .
On note f l'application de \mathcal{E} dans \mathcal{E} qui, à toute matrice M de \mathcal{E} , associe AM .
7. Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel \mathcal{E} .
8. Former la matrice F de f dans la base (I, A, A^2) de \mathcal{E} .
9.
 - a) Montrer : $f \circ f \circ f = 2f$.
 - b) En déduire que toute valeur propre λ de f vérifie : $\lambda^3 = 2\lambda$.
 - c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .
10. L'endomorphisme f est-il bijectif? diagonalisable?
11. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et une base de $\text{Ker}(f)$.
12.
 - a) Résoudre l'équation $f(M) = I + A^2$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.
 - b) Résoudre l'équation $f(N) = A + A^2$, d'inconnue $N \in \mathcal{E}$.