DM3 (version B)

Exercice (EML 2016)

On note I et A les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

PARTIE I : Étude de la matrice A

1. Calculer A^2.

Démonstration.

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

□

2. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.

Démonstration.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
Supposons $\lambda_1 I + \lambda_2 A + \lambda_3 A^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Ceci équivaut à :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_1 + 2\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui se réécrit sous forme de système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\boxed{\text{La famille } (I, A, A^2) \text{ est libre.}}$$

□

3. ***a)*** Justifier, sans calcul, que A est diagonalisable.

Démonstration.

$$\boxed{A \text{ est une matrice symétrique réelle, donc elle est diagonalisable.}}$$

□

b) Déterminer une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 et une matrice D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant telles que : $A = PDP^{-1}$.

Démonstration.

- Déterminons les valeurs propres de A.
  Par définition, les valeurs propres de A sont les réels λ tels que la matrice $(A - \lambda I)$ n'est pas inversible, *i.e.* tels que $\text{rg}(A - \lambda I) < 3$.
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\text{rg}(A-\lambda I) &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda^2) L_2}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda + \lambda(1-\lambda^2) \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

  La réduite obtenue est triangulaire supérieure. Elle est non inversible (*i.e.* de rang strictement inférieur à 3) si l'un de ses cœfficients diagonaux est nul.
  Autrement dit si : $\lambda + \lambda(1 - \lambda^2) = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
A - \lambda I \text{ non inversible} &\Leftrightarrow \lambda + \lambda(1+\lambda^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda(2 - \lambda^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda \in \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \text{ sont } -\sqrt{2},\ 0 \text{ et } \sqrt{2}.}$$

- Déterminons une base de $E_{\sqrt{2}}(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $\sqrt{2}$.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_{\sqrt{2}}(A) & \iff & AX = \sqrt{2}X \\
& \iff & (A - \sqrt{2}I)\ X = 0 \\
& \iff & \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\sqrt{2}\,x & + & y & & & = & 0 \\ x & - & \sqrt{2}\,y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & \sqrt{2}\,y & + & z & = & 0 \\ -\sqrt{2}\,x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 + \sqrt{2}L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & \sqrt{2}\,y & + & z & = & 0 \\ & - & y & + & \sqrt{2}\,z & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & \sqrt{2}\,y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & \sqrt{2}\,y & = & -z \\ & & y & = & \sqrt{2}\,z \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 + \sqrt{2}\ L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & z \\ & & y & = & \sqrt{2}\,z \end{array} \right.
\end{array}$$

  On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl}
E_{\sqrt{2}}(A) & = & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \ \text{ et } \ y = \sqrt{2}\ z\} \\
& = & \{ \begin{pmatrix} z \\ \sqrt{2}\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \{\ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

  La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est :
  × génératrice de $E_{\sqrt{2}}(A)$,
  × libre car constituée d'un vecteur non nul.

  $\boxed{\text{Ainsi, la famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_{\sqrt{2}}(A).}$

- Déterminons une base de $E_0(A)$, le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} X \in E_0(A) & \Longleftrightarrow & AX = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} & & y & & & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & = & -z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} E_0(A) & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \ \text{ et } \ y = 0 \} \\ & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \} \\ & = & \{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est :

× génératrice de $E_0(A)$,

× libre car constituée d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_0(A).}$$

- Déterminons une base de $E_{-\sqrt{2}}(A)$, le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $-\sqrt{2}$.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_{-\sqrt{2}}(A) & \iff & AX = -\sqrt{2}\ x \\
& \iff & (A + \sqrt{2} I)\ X = 0 \\
& \iff & \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \sqrt{2}\ x & + & y & & & = & 0 \\ x & + & \sqrt{2}\ y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\ z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & \sqrt{2}\ y & + & z & = & 0 \\ \sqrt{2}\ x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\ z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 - \sqrt{2} L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & \sqrt{2}\ y & + & z & = & 0 \\ & - & y & - & \sqrt{2}\ z & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\ z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & \sqrt{2}\ y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\ z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & \sqrt{2}\ y & = & -\ z \\ & & y & = & -\sqrt{2}\ z \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 - \sqrt{2}\ L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & = & z \\ & & y & = & -\sqrt{2}\ z \end{array} \right.
\end{array}$$

  On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-\sqrt{2}}(A) & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \ \text{ et } \ y = -\sqrt{2}\ z \} \\
& = & \{ \begin{pmatrix} z \\ -\sqrt{2}\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \} \\
& = & \{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

  La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

  × génératrice de $E_{-\sqrt{2}}(A)$,

  × libre car constituée d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_{-\sqrt{2}}(A).}$$

- D'après la question ***3.a)***, la matrice A est diagonalisable.
  Il existe donc une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
  La matrice P est obtenue en concaténant les vecteurs propres des bases des espaces propres.
  Les cœfficients de la matrice D sont les valeurs propres de A.

$$\boxed{\text{Ainsi, } A = PDP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.}$$

□

4. Montrer : $A^3 = 2A$.

Démonstration.

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2A$$

$$\boxed{A^3 = 2A}$$

□

PARTIE II : Étude d'une application définie sur $\mathcal{E}$

5. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que la famille (I, A, A^2) est une base de $\mathcal{E}$.
En déduire la dimension de $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- Montrons que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ aI + bA + cA^2 \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{Vect}\left(I, A, A^2\right) \end{aligned}$$

  De plus, $(I, A, A^2) \in (\mathscr{M}_3(\mathbb{R}))^3$.

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

- La famille (I, A, A^2) est :
  × génératrice de $\mathcal{E}$,
  × libre d'après la question ***2.***

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } (I, A, A^2) \text{ est une base de } \mathcal{E}.}$$

$$\boxed{\text{Enfin, comme } (I, A, A^2) \text{ est constituée de 3 vecteurs, } \dim(\mathcal{E}) = 3}$$

□

6. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, la matrice AM appartient à $\mathcal{E}$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{E}$.
D'après la question précédente, $\mathcal{E} = \text{Vect}\left(I, A, A^2\right)$.
Il existe donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que : $M = aI + bA + cA^2$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} AM & = & A(aI + bA + cA^2) & \\ & = & aA + bA^2 + cA^3 & \\ & = & aA + bA^2 + 2cA & \textit{(d'après la question 4.)} \\ & = & (a + 2c)A + bA^2 & \end{array}$$

Or : $(a + 2c)A + bA^2 \in \text{Vect}\left(A, A^2\right) \subset \text{Vect}\left(I, A, A^2\right) = \mathcal{E}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } M \in \mathcal{E},\ AM \in \mathcal{E}.}$$

□

On note f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à toute matrice M de $\mathcal{E}$, associe AM.

7. Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- D'après la question ***6.***, $f(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$.
- Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M, N) \in \mathcal{E}^2$.

$$f(\lambda M + \mu N) = A(\lambda M + \mu N) = \lambda AM + \mu AN = \lambda f(M) + \mu f(N)$$

  Donc f est une application linéaire.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{E}.}$$

□

8. Former la matrice F de f dans la base (I, A, A^2) de $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- $f(I) = A = 0 \times I + 1 \cdot A + 0 \cdot A^2$.
  Donc $\text{Mat}_{(I,A,A^2)}(f(I)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $f(A) = A^2 = 0 \cdot I + 0 \cdot A + 1 \cdot A^2$.
  Donc $\text{Mat}_{(I,A,A^2)}(f(A)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $f(A^2) = A^3 = 2A = 0 \cdot I + 2 \cdot A + 0 \cdot A^2$.
  Donc $\text{Mat}_{(I,A,A^2)}(f(A^2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{F = \text{Mat}_{(I,A,A^2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

9. a) Montrer : $f \circ f \circ f = 2f$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{E}$.

$$\begin{array}{rcl} (f \circ f \circ f)(M) & = & f(f(f(M))) \\ & = & f(f(AM)) \\ & = & f(A \times AM) \ = \ f(A^2M) \\ & = & A \times A^2M \ = \ A^3M \ = \ 2AM \ = \ 2f(M) \end{array}$$

$$\boxed{f \circ f \circ f = 2f}$$

□

b) En déduire que toute valeur propre λ de f vérifie : $\lambda^3 = 2\lambda$.

Démonstration.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f.
Notons M un vecteur propre associé à λ. Par définition : $f(M) = \lambda \cdot M$.

- D'après la question précédente :

$$(f \circ f \circ f)(M) = 2f(M) = 2\lambda \cdot M$$

- En raisonnant comme dans la question précédente :

$$\begin{array}{rcll} (f \circ f \circ f)(M) & = & f(f(f(M))) & \\ & = & f(f(\lambda M)) & \textit{(par définition de } M\textit{)} \\ & = & f(\lambda f(M)) & \textit{(car } f \textit{ est linéaire)} \\ & = & f(\lambda \cdot (\lambda \cdot M)) & \textit{(par définition de } M\textit{)} \\ & = & f(\lambda^2 \cdot M) \ = \ \lambda^2 \cdot f(M) & \textit{(car } f \textit{ est linéaire)} \\ & = & \lambda^2 \cdot (\lambda \cdot M) \ = \ \lambda^3 \cdot M & \end{array}$$

- En combinant les deux résultats précédents, on obtient :

$$\lambda^3 M = 2\lambda M \quad \text{ou encore} \quad (\lambda^3 - 2\lambda)\ M = 0$$

Or M est un vecteur propre, donc $M \neq 0$. Ainsi, $\lambda^3 - 2\lambda = 0$.

$$\boxed{\text{Toute valeur propre } \lambda \text{ de } f \text{ vérifie } \lambda^3 = 2\lambda.}$$

□

c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Démonstration.

- D'après la question précdente, si λ est une valeur propre de f, alors $\lambda^3 - 2\lambda = 0$.
  (c'est une implication, pas une équivalence !)
  Or :
  $$\lambda^3 - 2\lambda = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda(\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2}) = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda \in \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$$
  $$\boxed{\mathrm{Sp}\,(f) \subset \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}}$$
  Ceci permet d'affirmer que $-\sqrt{2}$, 0, et $\sqrt{2}$ sont les seules valeurs propres possibles de f. Il reste à déterminer lesquelles sont réellement valeurs propres.
- Déterminons $E_{\sqrt{2}}(f) = \mathrm{Ker}(f - \sqrt{2}\ \mathrm{id})$.
  Soit $M \in \mathcal{E}$.
  On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{(I,A,A^2)}(M)$. Autrement dit : $M = x \cdot I + y \cdot A + z \cdot A^2$.

$$\begin{array}{rcl}
M \in E_{\sqrt{2}}(f) & \Longleftrightarrow & (f - \sqrt{2}\ \mathrm{id})(M) = 0_{\mathcal{E}} \\
& \Longleftrightarrow & (F - \sqrt{2}\ I)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\sqrt{2}\ x & & & & & = & 0 \\ x & - & \sqrt{2}\ y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\ z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow \sqrt{2}L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & & & = & 0 \\ & - & 2\ y & + & 2\sqrt{2}\ z & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\ z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & 0 \\ y & - & \sqrt{2}\ z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & \sqrt{2}\ z \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl}
E_{\sqrt{2}}(f) & = & \left\{ M \in \mathcal{E} \mid f(M) = \sqrt{2} M \right\} \\
& = & \{M = x \cdot I + y \cdot A + z \cdot A^2 \mid x = 0 \ \text{ et } \ y = \sqrt{2}\ z\} \\
& = & \left\{ 0 \cdot I + \sqrt{2}\ z \cdot A + z \cdot A^2 \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
& = & \left\{ z \cdot (\sqrt{2}\ A + A^2) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left(\sqrt{2}\ A + A^2\right)
\end{array}$$

En particulier, $E_{\sqrt{2}}(f) \neq \{0\}$ donc $\sqrt{2}$ est bien valeur propre de f.

$$\boxed{\sqrt{2} \text{ est valeur propre de } f \text{ et l'espace propre associé est : } E_{\sqrt{2}}(f) = \mathrm{Vect}\left(\sqrt{2}\ A + A^2\right).}$$

Remarque

Profitons de ce premier calcul pour faire un point sur les objets étudiés :

× $\mathcal{E} = \text{Vect}\left(I, A, A^2\right)$ est un ev de dimension 3.

Ainsi, tout élément $M \in \mathcal{E}$ s'écrit sous la forme $M = x \cdot I + y \cdot A + z \cdot A^2$.

Ce qui revient à dire que M admet pour coordonnées (x, y, z) dans la base (I, A, A^2).

Il ne faut pas confondre la notion de coordonnées de M avec la matrice représentative de M dans la base (I, A, A^2) : $X = \text{Mat}_{(I,A,A^2)}(M) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq (x, y, z)$.

× $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

L'espace $\mathcal{E}$ étant de dimension 3, la matrice représentative de f dans la base (I, A, A^2) est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$: $F = \text{Mat}_{(I,A,A^2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

× $E_\lambda(f) = \{M \in \mathcal{E} \mid f(M) = \lambda M\}$ est un sev de $\mathcal{E}$ donc un ensemble dont les éléments sont des sont des matrices de $\mathcal{E} \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

× $E_\lambda(F) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid FX = \lambda X\}$ est un sev de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc un ensemble dont les éléments sont des sont des vecteurs colonnes de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Il faut donc bien comprendre que, de manière générale : $E_\lambda(f) \neq E_\lambda(F)$.

En revanche, $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(F)$: f a les mêmes valeurs propres que toute matrice qui le représente.

- Déterminons maintenant $E_0(f) = \text{Ker}(f - 0\text{id}) = \text{Ker}(f)$.
  Soit $M \in \mathcal{E}$.
  On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \text{Mat}_{(I,A,A^2)}(M)$. Autrement dit : $M = x \cdot I + y \cdot A + z \cdot A^2$.

$$\begin{aligned} M \in \text{Ker}(f) &\iff f(M) = 0_{\mathcal{E}} \\ &\iff FX = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & + & 2z & = & 0 \\ & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & = & -2z \\ & y & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} E_0(f) &= \{M \in \mathcal{E} \mid f(M) = 0\} \\ &= \{x \cdot I + y \cdot A + z \cdot A^2 \mid x = -2z \ \text{ et } \ y = 0\} \\ &= \left\{(-2z) \cdot I + 0 \cdot A + z \cdot A^2 \mid z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{z \cdot (-2I + A^2) \mid z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \text{Vect}\left(-2I + A^2\right) \end{aligned}$$

En particulier, $E_0(f) \neq \{0\}$ donc 0 est bien valeur propre de f.

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } f \text{ et l'espace propre associé est : } E_0(f) = \text{Vect}\left(-2I + A^2\right).}$$

- Déterminons enfin $E_{-\sqrt{2}}(f) = \mathrm{Ker}(f + \sqrt{2}\ \mathrm{id})$.
  Soit $M \in \mathcal{E}$.
  On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{(I,A,A^2)}(M)$. Autrement dit : $M = x \cdot I + y \cdot A + z \cdot A^2$.

$$\begin{array}{rcl}
M \in E_{-\sqrt{2}}(f) & \iff & (f + \sqrt{2}\ \mathrm{id})(M) = 0_{\mathcal{E}} \\[2mm]
& \iff & (F + \sqrt{2}\ I)X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[2mm]
& \iff & \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[6mm]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \sqrt{2}\ x & & & & & = & 0 \\ x & + & \sqrt{2}\ y & + & 2\ z & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\ z & = & 0 \end{array} \right. \\[8mm]
& \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow \sqrt{2}L_2 - L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & 0 \\ 2\ y & + & 2\sqrt{2}\ z & = & 0 \\ y & + & \sqrt{2}\ z & = & 0 \end{array} \right. \\[8mm]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & 0 \\ y & + & \sqrt{2}\ z & = & 0 \end{array} \right. \\[8mm]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -\sqrt{2}\ z \end{array} \right.
\end{array}$$

  On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-\sqrt{2}}(f) & = & \left\{M \in \mathcal{E} \mid f(M) = -\sqrt{2}M\right\} \\[2mm]
& = & \{xI + yA + zA^2 \mid x = 0 \ \text{ et } y = -\sqrt{2}\ z\} \\[2mm]
& = & \left\{0 \cdot I - \sqrt{2}\ z \cdot A + z \cdot A^2 \mid z \in \mathbb{R}\right\} \\[2mm]
& = & \left\{z \cdot (-\sqrt{2}A + A^2) \mid z \in \mathbb{R}\right\} \\[2mm]
& = & \mathrm{Vect}\left(-\sqrt{2}A + A^2\right)
\end{array}$$

  En particulier, $E_{-\sqrt{2}}(f) \neq \{0\}$ donc $-\sqrt{2}$ est bien valeur propre de f.

$$\boxed{-\sqrt{2} \text{ est valeur propre de } f \text{ et l'espace propre associé est : } E_{-\sqrt{2}}(f) = \mathrm{Vect}\left(-\sqrt{2}\ A + A^2\right).}$$

Remarque

- Pour faire écho à la remarque précédente, on aurait pu déterminer $E_{\sqrt{2}}(F)$, $E_0(F)$, $E_{-\sqrt{2}}(F)$.

$$E_{\sqrt{2}}(F) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad E_0(F) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad E_{\sqrt{2}}(F) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

- Insistons une nouvelle fois sur la différence coordonnées / matrice représentative.
  × $M = 0 \cdot I + \sqrt{2} \cdot A + 1 \cdot A^2$ a pour coordonnées $(0, \sqrt{2}, 1)$ dans la base (I, A, A^2).
  × la matrice représentative de M dans cette base est $X = \mathrm{Mat}_{(I,A,A^2)}(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

□

10. L'endomorphisme f est-il bijectif ? diagonalisable ?

Démonstration.

- 0 est une valeur propre de f, donc $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$.
  On en conclut que l'application linéaire f n'est pas injective.

  $$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ n'est pas bijectif.}}$$

- D'autre part, l'endomorphisme $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ possède 3 valeurs propres distinctes et l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ est de dimension 3.

  $$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est diagonalisable.}}$$

Remarque

Le premier point de cette quesiton amène à plusieurs remarques.

- Tout d'abord, rappelons qu'une application quelconque f (pas forcément linéaire) est bijective si elle est à la fois injective et surjective. Telle que la réponse est rédigée, on utilise ici le fait que :

  $$f \text{ bijective } \Rightarrow f \text{ injective}$$

  et donc, par contraposée :

  $$f \text{ non injective } \Rightarrow f \text{ non bijective}$$

- Dans le cas où f est une application linéaire, on sait de plus que :

  $$f \text{ injective } \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0\}$$

  La combinaison de ces deux points permet de conclure la première partie de la question.

- Dans le cas où $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une application linéaire et que $\mathcal{E}$ **est de dimension finie** :

  $$f \text{ bijective } \Leftrightarrow f \text{ injective } \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0\} \Leftrightarrow 0 \text{ n'est pas valeur propre de } f$$

  L'hypothèse de dimension finie est primordiale pour la première équivalence (les autres sont toujours vraies). Autrement dit, il existe des applications linéaires injectives et non bijectives si $\mathcal{E}$ est de dimension infinie (et seulement dans ce cas).

- Cela signifie que si f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$, de dimension finie, qui n'admet pas 0 comme valeur propre, on doit rédiger comme suit.

  0 n'est pas valeur propre de f, donc $\text{Ker}(f) = \{0\}$.
  On en conclut que l'application linéaire f est injective.
  Ainsi, comme $\mathcal{E}$ **est de dimension finie**, f est bijective.
  (l'oubli de cette hypothèse sera forcément sanctionné)

- Par contre, on peut utiliser, sans citer d'hypothèse que :

  $$\text{La matrice } A \text{ est inversible } \Leftrightarrow 0 \text{ n'est pas valeur propre de } A$$

  En effet, la notion de matrice sous-entend que l'on se trouve en dimension finie.

□

11. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Démonstration.

- D'après la question ***9.***, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(-2I + A^2\right)$.
  La famille $(-2I + A^2)$ est :
  - × génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$,
  - × libre car constituée d'une unique matrice non nulle.

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } (-2I + A^2) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f).}$$

- La famille (I, A, A^2) étant une base de $\mathcal{E}$:

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(I), f(A), f(A^2)\right) = \mathrm{Vect}\left(A, A^2, 2A\right) = \mathrm{Vect}\left(A, A^2\right)$$

  La famille (A, A^2) est :
  - × génératrice de $\mathrm{Im}(f)$,
  - × libre car constituée de 2 matrices non colinéaires.

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } (A, A^2) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f).}$$

□

12. a) Résoudre l'équation $f(M) = I + A^2$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{E}$.
Il existe donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = a \cdot I + b \cdot A + c \cdot A^2$. Alors :

$$\begin{array}{cl} & f(M) = I + A^2 \\ \Leftrightarrow & f(a \cdot I + b \cdot A + c \cdot A^2) = I + A^2 \\ \Leftrightarrow & a \cdot f(I) + b \cdot f(A) + c \cdot f(A^2) = I + A^2 \\ \Leftrightarrow & a \cdot A + b \cdot A^2 + 2c \cdot A = I + A^2 \\ \Leftrightarrow & I - (a + 2c) \cdot A + (1 - b) \cdot A^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} 1 & = & 0 \\ -(a+2c) & = & 0 \\ 1 - b & = & 0 \end{array} \right. \qquad \textit{(car la famille } (I, A, A^2) \textit{ est libre)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ce système n'admettant pas de solution, l'équation } f(M) = I + A^2 \text{ n'admet pas de solution.}}$$

Remarque
On pouvait rédiger différemment.

- Comme $f(M) \in \mathrm{Im}(f)$, si l'équation $f(M) = I + A^2$ est vérifiée alors : $I + A^2 \in \mathrm{Im}(f)$.
  De plus : $A^2 \in \mathrm{Vect}\left(A, A^2\right) = \mathrm{Im}(f)$.
  On en déduit, par soustraction : $I = (I + A^2) - A^2 \in \mathrm{Im}(f)$.
  Or (I, A, A^2) est une famille libre et $I \neq 0$ donc $I \in \mathrm{Vect}\left(A, A^2\right)$ est impossible.

□

b) Résoudre l'équation $f(N) = A + A^2$, d'inconnue $N \in \mathcal{E}$.

Démonstration.
Soit $N \in \mathcal{E}$.
Il existe donc $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $N = a \cdot I + b \cdot A + c \cdot A^2$. Alors :

$$\begin{array}{cl} & f(N) = A + A^2 \\ \Leftrightarrow & f(a \cdot I + b \cdot A + c \cdot A^2) = A + A^2 \\ \Leftrightarrow & a \cdot f(I) + b \cdot f(A) + c \cdot f(A^2) = A + A^2 \\ \Leftrightarrow & a \cdot A + b \cdot A^2 + 2c \cdot A = A + A^2 \\ \Leftrightarrow & (a + 2c - 1) \cdot A + (b-1) \cdot A^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccccc} a & & + & 2c & = & 1 \\ & b & & & = & 1 \end{array} \right. \qquad \textit{(car } (A, A^2) \textit{ sous-famille de } (I, A, A^2) \textit{ est libre)} \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & 1 - 2c \\ b & = & 1 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation } f(N) = A + A^2 \text{ est : } \{(1-2c) \cdot I + A + c \cdot A^2 \mid c \in \mathbb{R}\}.}$$

□