DM4 (version A)

Exercice 3 (ESC 1997)

On dispose de deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$, de six boules numérotées de 1 à 6 ainsi que d'un dé équilibré. Initialement l'urne $\mathcal{U}_1$ contient les boules numérotées 1 et 2, l'urne $\mathcal{U}_2$ contient les boules numérotées 3, 4, 5 et 6.
On appelle échange l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu avec le dé.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans $\mathcal{U}_1$ après n échanges successifs.

1. Les cinq premiers lancers du dé donnent : 1, 3, 2, 3, 5.
Quel est le contenu de $\mathcal{U}_1$ à l'issue du $5^{\text{ème}}$ échange ?

2. Quelle est la loi de X_1 ? Calculer son espérance mathématique $\mathbb{E}(X_1)$.

3. ***a)*** Donner, en justifiant, $X_2(\Omega)$.
Déterminer, pour tout $(i, j) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)$, $\mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j])$.

b) En déduire la loi de X_2.

c) Soit X et Y deux v.a.r. discrètes. On définit, sous réserve d'existence, les quantités suivants :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy \, \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \\ \mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\end{aligned}$$

Déterminer $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

4. ***a)*** Montrer que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ on a :

- $\mathbb{P}([X_{n+1} = 0]) = \dfrac{1}{6}\mathbb{P}([X_n = 1])$
- Pour tout $k \in [\![1, 5]\!]$:

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = \frac{7-k}{6} \, \mathbb{P}([X_n = k-1]) + \frac{k+1}{6} \, \mathbb{P}([X_n = k+1])$$

- $\mathbb{P}([X_{n+1} = 6]) = \dfrac{1}{6}\mathbb{P}([X_n = 5])$

b) En déduire que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \frac{2}{3} \, \mathbb{E}(X_n) + 1.$$

c) Calculer alors $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n)$.