DM1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.
On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

1. ***a)*** Dresser le tableau de variation de f, limites comprises.

b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est parfaitement défini et strictement positif.

2. Les scripts suivants renvoient, pour celui de gauche, la valeur 5, et celui de droite, la valeur 6.
Que sait-on de u_5 et u_6 ?
Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

```
u = 1
n = 0
while u > 0.00001
  u = exp(-u)/u
  n = n + 1
end
disp(n)
```

```
u = 1
n = 0
while u < 100000
  u = exp(-u)/u
  n = n + 1
end
disp(n)
```

3. ***a)*** Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = \mathrm{e}^{-x} - x^2$$

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une seule solution, que l'on notera α, sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer que $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \alpha < 1$.

4. ***a)*** Établir les deux inégalités : $u_2 > u_0$ et $u_3 < u_1$.

b) En déduire les variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

5. On pose : $h(x) = \begin{cases} (f\circ f)(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) Déterminer $h(x)$ pour tout réel x strictement positif et vérifier que h est continue en 0.

b) Résoudre l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x élément de $\mathbb{R}_+$.

c) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Montrer par l'absurde que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge puis donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$.

e) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?