

## DM1

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ .

On considère également la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et par la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$ , valable pour tout entier naturel  $n$ .

1. a) Dresser le tableau de variation de  $f$ , limites comprises.

*Démonstration.*

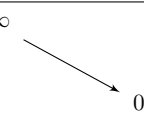
- La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  en tant que quotient de fonctions dérivables sur  $]0, +\infty[$  dont le dénominateur ne s'annule pas (pour tout  $x \in ]0, +\infty[, x \neq 0$ ).
- Soit  $x \in ]0, +\infty[$ .

$$f'(x) = \frac{-e^{-x} \times x - e^{-x} \times 1}{x^2} = -\frac{(x+1)e^{-x}}{x^2}$$

Or  $e^{-x^2} > 0$ ,  $x^2 > 0$ , et  $x+1 > 0$  (car  $x > 0$ ). Ainsi :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, f'(x) < 0$$

- On en déduit le tableau de variations suivant :

$x$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	
Variations de $f$	$+\infty$  0	

- Détaillons les éléments de ce tableau.

× Comme  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = e^0 = 1$ , on a :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ .

× Tout d'abord, pour tout  $x \in ]0, +\infty[ : f(x) = \frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{x e^x}$ .

Or :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty$ . Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

□

b) Vérifier que chaque terme de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est parfaitement défini et strictement positif.

*Démonstration.*

Démontrons par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$  où  $\mathcal{P}(n) : \begin{cases} u_n \text{ est bien défini} \\ u_n > 0 \end{cases}$

► **Initialisation :**

Tout d'abord  $u_0 = 1$ . Donc le terme  $u_0$  est bien défini et :  $u_0 > 0$ .

D'où  $\mathcal{P}(0)$ .

► **Hérédité :** soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Supposons  $\mathcal{P}(n)$  et démontrons  $\mathcal{P}(n+1)$  (i.e.  $\begin{cases} u_{n+1} \text{ est bien défini} \\ u_{n+1} > 0 \end{cases}$ )

Par hypothèse de récurrence,  $u_n$  est bien défini et  $u_n > 0$ .

- La fonction  $f$  est définie sur  $]0, +\infty[$  et  $u_n \in ]0, +\infty[$ .

Donc  $u_{n+1} = f(u_n)$  est bien défini.

- D'après le tableau de variations obtenu en question précédente :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, f(x) > 0$$

Or  $u_n > 0$ , donc :  $f(u_n) > 0$ , c'est-à-dire  $u_{n+1} > 0$ .

D'où  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Par principe de récurrence, on obtient que  $(u_n)$  est bien définie et :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ .

### Commentaire

Cette question est un classique de l'étude des suites récurrentes. Il faut savoir rédiger proprement la récurrence associée en commençant par bien énoncer l'hypothèse de récurrence. Il s'agit de démontrer :

« **la suite**  $(u_n)$  est bien définie »

Pour ce faire, on démontre :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \quad \text{où} \quad \mathcal{P}(n) : \text{le réel } u_n \text{ est bien défini}$$

De plus, pour s'assurer de pouvoir effectivement calculer  $f(u_n)$ , il faut être sûr que  $u_n$  soit dans l'ensemble de définition de  $f$ . Ici, il s'agit de vérifier qu'à tout rang  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \neq 0$ . On démontre en réalité une propriété plus forte, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \quad \text{où} \quad \mathcal{P}(n) : \begin{cases} u_n \text{ est bien défini} \\ u_n > 0 \end{cases}$$

Démontrer une propriété plus forte que celle assurant la bonne définition de la suite  $(u_n)$  ne rend pas la démonstration plus difficile. Au contraire ! Tout se joue lors de l'étape d'hérédité : on aura plus de matériel mathématique si l'on suppose  $u_n > 0$  que si l'on suppose  $u_n \neq 0$  ce qui facilite la suite de la démonstration. □

2. Les scripts suivants renvoient, pour celui de gauche, la valeur 5, et celui de droite, la valeur 6. Que sait-on de  $u_5$  et  $u_6$  ? Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

```

1  u = 1
2  n = 0
3  while u > 0.00001
4      u = exp(-u)/u
5      n = n + 1
6  end
7  disp(n)

```

```

1  u = 1
2  n = 0
3  while u < 100000
4      u = exp(-u)/u
5      n = n + 1
6  end
7  disp(n)

```

*Démonstration.*

• Expliquons le script de gauche. L'idée est la suivante :

1) initialement, la variable  $u$  contient la valeur  $u_0 = 1$ .

2) on teste alors si la valeur contenue dans  $u$  est strictement plus grande que  $10^{-5}$ .

Tant que ce n'est pas le cas, on met à jour la variable  $u$  afin qu'elle contienne la valeur suivante de la suite  $(u_n)$ .

Ce point est réalisé avec une boucle **while**.

En sortie de boucle, on est assuré que la variable  $u$  contient un élément de la suite  $(u_n)$  plus petit que  $10^{-5}$ . L'indice de cet élément est repéré à l'aide d'un compteur  $n$ , initialement affecté à 0 et incrémenté de 1 à chaque tour de boucle.

D'après l'énoncé, le premier script renvoie la valeur 5,  
donc  $u_5$  est le premier terme de la suite  $(u_n)$  vérifiant :  $u_n \leq 10^{-5}$ .

- On raisonne de même pour le script de droite.

D'après l'énoncé, le second script renvoie la valeur 6,  
donc  $u_6$  est le premier terme de la suite  $(u_n)$  vérifiant :  $u_n \geq 10^5$ .

- On sait donc :  $u_5 \leq 10^{-5}$  et  $u_6 \geq 10^5$ .

On peut conjecturer que la suite  $(u_n)$  diverge.

### Commentaire

On pouvait essayer d'aller plus loin et conjecturer que :

- × la sous-suite des termes d'indice impair  $(u_{2n+1})$  converge vers 0,
- × la sous-suite des termes d'indice pair  $(u_{2n})$  diverge vers  $+\infty$ .

On dispose de très peu d'informations sur la suite  $(u_n)$  à ce stade de l'exercice et ces programmes ne nous renseignent que sur deux valeurs successives. La question ne semble donc pas particulièrement pertinente. □

3. a) Étudier les variations de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) = e^{-x} - x^2$$

*Démonstration.*

- La fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, +\infty[$  en tant que somme de fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, +\infty[$ .
- Soit  $x \in [0, +\infty[$ .

$$g'(x) = -e^{-x} - 2x$$

De plus :  $-e^{-x} < 0$  et  $-2x \leq 0$ . Donc :  $g'(x) < 0$ .

- On obtient le tableau de variations suivant :

$x$	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	-	
Variations de $g$	$1 \begin{array}{l} \searrow \\ \rightarrow \\ \swarrow \end{array} -\infty$	

- Détaillons les éléments de ce tableau.

× Tout d'abord :  $g'(0) = -e^{-0} - 2 \times 0 = -1$ .

× Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty$ , on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = -\infty$ .

× Ensuite :  $g(0) = e^{-0} - 0 = 1$ .

× Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$ , on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ . □

- b) En déduire que l'équation  $f(x) = x$ , d'inconnue  $x$ , possède une seule solution, que l'on notera  $\alpha$ , sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

*Démonstration.*

- Soit  $x \in ]0, +\infty[$ . On raisonne par équivalence.

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{e^{-x}}{x} = x \Leftrightarrow e^{-x} = x^2 \Leftrightarrow e^{-x} - x^2 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

- La fonction  $g$  est :

× continue sur  $]0, +\infty[$ ,

× strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

Ainsi, elle réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $g(]0, +\infty[)$  où :

$$g(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \right[ = ] -\infty, 1[$$

Or  $0 \in ] -\infty, 1[$ . Donc l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $]0, +\infty[$ .

Par équivalence, on en déduit que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $]0, +\infty[$ .

□

- c) Montrer que  $\frac{1}{e} < \alpha < 1$ .

*Démonstration.*

- Tout d'abord :  $g\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{e}} - \left(\frac{1}{e}\right)^2 = e^{-\frac{1}{e}} - e^{-2}$ .

De plus :

$$g\left(\frac{1}{e}\right) > 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{e}} - e^{-2} > 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{e}} > e^{-2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{e} > -2 \quad \text{(par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur } ]0, +\infty[)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e} < 2 \Leftrightarrow e > \frac{1}{2} \quad \text{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur } ]0, +\infty[)$$

Or la dernière inégalité est vraie car  $e > 2$ .

Donc, par équivalence :  $g\left(\frac{1}{e}\right) > 0$

- Par ailleurs, par définition, le réel  $\alpha$  est l'unique solution de l'équation  $g(x) = 0$ .

On en déduit :  $g(\alpha) = 0$ .

- Enfin :  $g(1) = e^{-1} - 1$ . De plus :

$$g(1) < 0 \Leftrightarrow e^{-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{-1} < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < \ln(1) = 0 \quad \text{(par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur } ]0, +\infty[)$$

La dernière inégalité est vraie.

Donc, par équivalence :  $g(1) > 0$ .

- On en déduit :  $g(1) < g(\alpha) < g\left(\frac{1}{e}\right)$ .

Or, d'après le théorème de la bijection,  $g^{-1} : ]-\infty, 1[ \rightarrow ]0, +\infty[$  est strictement décroissante sur  $] -\infty, 1[$ .

En appliquant  $g^{-1}$  à l'encadrement précédent, on obtient :  $\frac{1}{e} < \alpha < 1$ .

□

4. a) Établir les deux inégalités :  $u_2 > u_0$  et  $u_3 < u_1$ .

*Démonstration.*

- Tout d'abord :  $u_0 = 1$ .

$$\text{Donc : } u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{e^{-1}}{1} = e^{-1}.$$

$$\text{D'où : } u_2 = f(u_1) = f(e^{-1}) = \frac{e^{-e^{-1}}}{e^{-1}} = e^{1-e^{-1}}.$$

- Or :

$$u_2 > u_0 \Leftrightarrow e^{1-e^{-1}} > 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-1} > 0$$

(par stricte croissance de la fonction  $\ln$  sur  $]0, +\infty[$ )

$$\Leftrightarrow 1 > e^{-1} \Leftrightarrow 0 > -1$$

(par stricte croissance de la fonction  $\ln$  sur  $]0, +\infty[$ )

La dernière inégalité est vraie.

Donc, par équivalence :  $u_2 > u_0$ .

- Enfin, comme  $u_2 > u_0$

$$\text{alors } u_3 = f(u_2) < f(u_0) = u_1 \quad (\text{par stricte décroissance de la fonction } f \text{ sur } ]0, +\infty[)$$

Ainsi :  $u_3 < u_1$ .

□

b) En déduire les variations des suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ .

*Démonstration.*

- Démontrons par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$  où  $\mathcal{P}(n) : u_{2n} < u_{2(n+1)}$ .

► **Initialisation :**

D'après la question précédente :  $u_0 < u_2$ .

D'où  $\mathcal{P}(0)$ .

► **Hérédité :** soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Supposons  $\mathcal{P}(n)$  et démontrons  $\mathcal{P}(n+1)$  (i.e.  $u_{2(n+1)} < u_{2(n+2)}$ ).

Par hypothèse de récurrence :  $u_{2n} < u_{2(n+1)}$ , c'est-à-dire  $u_{2n} < u_{2n+2}$  (\*).

Rappelons alors :  $u_{2n} > 0$  et  $u_{2n+2} > 0$  (cf en question 1.b)).

Ainsi, d'après (\*) et par stricte décroissance de la fonction  $f$  sur  $]0, +\infty[$  :

$$f(u_{2n}) > f(u_{2n+2})$$

$$\parallel \qquad \parallel$$

$$u_{2n+1} \qquad u_{2n+3}$$

Toujours par stricte décroissance de  $f$  sur  $]0, +\infty[$  :

$$\begin{array}{ccc} f(u_{2n+1}) < f(u_{2n+3}) & & \\ \parallel & & \parallel \\ u_{2(n+1)} = u_{2n+2} & & u_{2n+4} = u_{2(n+2)} \end{array}$$

D'où  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Ainsi, par principe de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} < u_{2(n+1)}$ .

Autrement dit, la suite  $(u_{2n})$  est strictement croissante.

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $u_{2n+2} < u_{2n}$  :

$$\begin{array}{ccc} f(u_{2n+2}) > f(u_{2n}) & \text{(par stricte décroissance de la} & \\ & \text{fonction } f \text{ sur } ]0, +\infty[ & \\ \parallel & & \parallel \\ u_{2n+3} > u_{2n+1} & & \end{array}$$

On en déduit que la suite  $(u_{2n+1})$  est strictement décroissante.

### Commentaire

- Dans cette question, on commence par démontrer (par récurrence) que la suite  $(u_{2n})$  est strictement croissante. On peut évidemment opérer de même pour la suite  $(u_{2n+1})$ . Cette méthode est plus longue mais elle est juste et permet donc d'obtenir tous les points alloués à cette question. Cependant, elle représente une perte de points à terme : le temps nécessaire à la rédaction de cette récurrence est du temps perdu sur une autre question.
- Il y a fort à parier qu'une rédaction du type « par une récurrence analogue » permettrait d'obtenir tous les points si la première récurrence a été faite correctement. □

5. On pose :  $h(x) = \begin{cases} (f \circ f)(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- a) Déterminer  $h(x)$  pour tout réel  $x$  strictement positif et vérifier que  $h$  est continue en 0.

*Démonstration.*

- Soit  $x \in ]0, +\infty[$ .

$$\begin{aligned} h(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{e^{-x}}{x}\right)}{\frac{e^{-x}}{x}} = x \frac{\exp\left(-\frac{e^{-x}}{x}\right)}{\exp(-x)} = x \exp\left(x - \frac{e^{-x}}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\forall x \in ]0, +\infty[, h(x) = x \exp\left(x - \frac{e^{-x}}{x}\right)$$

- Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = e^{-0} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ , on a :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x}}{x} = +\infty$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ , d'où :  $\lim_{x \rightarrow 0} x - \frac{e^{-x}}{x} = -\infty$ .

Ainsi :  $\lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(x - \frac{e^{-x}}{x}\right) = 0$ . Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 \times 0 = 0 = h(0)$$

On en déduit que la fonction  $h$  est continue en 0. □

b) Résoudre l'équation  $h(x) = x$ , d'inconnue  $x$  élément de  $\mathbb{R}_+$ .

*Démonstration.*

- Tout d'abord :  $h(0) = 0$ .

Le réel 0 est donc solution de l'équation  $h(x) = x$ .

- Soit  $x \in ]0, +\infty[$ .

$$\begin{aligned}
 h(x) = x &\Leftrightarrow x \exp\left(x - \frac{e^{-x}}{x}\right) = x \\
 &\Leftrightarrow \exp\left(x - \frac{e^{-x}}{x}\right) = 1 && \text{(car } x \neq 0) \\
 &\Leftrightarrow x - \frac{e^{-x}}{x} = 0 && \text{(car la fonction } \ln \text{ est} \\
 &&& \text{bijective sur } ]0, +\infty[) \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{e^{-x}}{x} \Leftrightarrow x^2 = e^{-x} \\
 &\Leftrightarrow 0 = e^{-x} - x^2 \Leftrightarrow g(x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = \alpha && \text{(d'après la question 3.b)}
 \end{aligned}$$

Finalement, l'équation  $h(x) = x$  admet exactement deux solutions sur  $]0, +\infty[$  : 0 et  $\alpha$ .

**Commentaire**

On rappelle, qu'en question **3.b**), on a résolu l'équation  $g(x) = 0$  sur  $]0, +\infty[$  (0 **exclus**). Or on veut dans cette question **5.b**) résoudre l'équation  $h(x) = x$  sur  $]0, +\infty[$  (0 **inclus**). Il faut donc tester si le réel 0 est solution de l'équation  $h(x) = x$  à part. On notera aussi que l'équivalence «  $h(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$  » est valide seulement si  $x \neq 0$ . □

c) En déduire la limite de la suite  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ .

*Démonstration.*

- La suite  $(u_{2n+1})$  est :
  - × décroissante, d'après la question **4.b**),
  - × minorée par 0, d'après la question **1.b**) ( $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ )

La suite  $(u_{2n+1})$  converge donc vers un réel  $\ell$  vérifiant  $\ell \geq 0$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned}
 u_{2(n+1)+1} &= u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) \\
 &= f(f(u_{2n+1})) && \text{(car } u_{2n+2} = f(u_{2n+1})) \\
 &= (f \circ f)(u_{2n+1}) \\
 &= h(u_{2n+1}) && \text{(par définition de } h)
 \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2(n+1)+1} = h(u_{2n+1})$$

- La fonction  $h$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . En particulier, elle est continue au point  $\ell$ .  
Donc, par passage à la limite dans l'égalité précédente :

$$\ell = h(\ell)$$

Le réel  $\ell$  est donc solution de l'équation  $h(x) = x$  sur  $[0, +\infty[$ .

D'après la question précédente, on en déduit :  $\ell = 0$  ou  $\ell = \alpha$ .

- Comme la suite  $(u_{2n+1})$  est décroissante, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{2n+1} \leq u_1$$

Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient :

$$\ell \leq u_1$$

Or :  $u_1 = \frac{1}{e}$  (question 4.a) et  $\frac{1}{e} < \alpha$  (question 3.c). Ainsi :

$$\ell \leq u_1 = \frac{1}{e} < \alpha$$

Ainsi :  $\ell < \alpha$  et donc :  $\ell \neq \alpha$ . On en déduit :  $\ell = 0$ .

La suite  $(u_{2n+1})$  converge vers 0.

#### Commentaire

- On pouvait aussi remarquer que, comme la suite  $(u_{2n+1})$  est décroissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ell \leq u_{2n+1}$$

(la limite de  $(u_{2n+1})$  est sa borne inférieure et donc un minorant de  $(u_{2n+1})$ )

Ainsi, toujours par décroissance de la suite  $(u_{2n+1})$  on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ell \leq u_{2n+1} \leq u_1$$

On conclut en remarquant :  $u_1 = \frac{1}{e} < \alpha$ .

- La notion de borne inférieure est hors programme. Le résultat évoqué ci-dessus est donc à la limite du programme et on préférera donc la démonstration du corrigé. □

d) Montrer par l'absurde que la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  diverge puis donner  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n}$ .

*Démonstration.*

- D'après la question 4.b), la suite  $(u_{2n})$  est strictement croissante.

Deux cas se présentent alors :

- × soit elle est majorée. Dans ce cas, la suite  $(u_{2n})$  converge vers une limite  $L$  vérifiant  $L \geq 0$ .
- × soit elle n'est pas majorée. Dans ce cas, la suite  $(u_{2n})$  diverge vers  $+\infty$ .

Démontrons qu'on est dans le second cas.

- Pour ce faire, on procède par l'absurde. On suppose alors que la suite  $(u_{2n})$  est majorée.

La suite  $(u_{2n})$  est :

- × croissante d'après la question 4.b),
- × majorée.

Elle est donc convergente vers un réel  $L$  vérifiant  $L \geq 0$ .



- Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = h(u_{2n})$$

Par passage à la limite dans l'égalité précédente :  $L = h(L)$ .

Donc, d'après la question **5.b**) :  $L = 0$  ou  $L = \alpha$ .

- Comme la suite  $(u_{2n})$  est croissante, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \geq u_0$$

Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient :

$$L \geq u_0 = 1$$

On en déduit :  $L \neq 0$ .

De plus, comme  $\alpha < 1$  (question **3.c**) :

$$L \geq u_0 = 1 > \alpha$$

Ainsi :  $L > \alpha$  et donc  $L \neq \alpha$ .

Ceci est absurde car  $L = 0$  ou  $L = \alpha$ .

On en déduit que la suite  $(u_{2n})$  n'est pas majorée.

#### Commentaire

- On pouvait aussi remarquer que, comme la suite  $(u_{2n})$  est croissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \leq L$$

(la limite de  $(u_{2n})$  est sa borne supérieure et donc un majorant de  $(u_{2n})$ )

Ainsi, toujours par croissance de la suite  $(u_{2n})$  on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_{2n} \leq L$$

On conclut en remarquant :  $u_0 = 1 > \alpha$ .

- La notion de borne supérieure est hors programme. Le résultat évoqué ci-dessus est donc à la limite du programme et on préférera donc la démonstration du corrigé.

- Finalement, la suite  $(u_{2n})$  est :

- × croissante,
- × non majorée.

On en déduit que la suite  $(u_{2n})$  diverge vers  $+\infty$ .

#### Commentaire

L'énoncé demande ici la nature d'une suite **croissante**. Il faut tout de suite penser au théorème de convergence monotone (*cf* début de démonstration).

Le réflexe, pour démontrer la divergence, est donc de raisonner par l'absurde en supposant que la suite est majorée (et non qu'elle est convergente). □

e) Que peut-on en déduire sur la suite  $(u_n)$  ?

*Démonstration.*

La suite  $(u_n)$  admet une sous-suite divergente (la suite extraite  $(u_{2n})$ ).

On en déduit que la suite  $(u_n)$  diverge.

**Commentaire**

On utilise ici la proposition suivante :

Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.

Plus précisément, on utilise sa forme contraposée :

Si une suite  $(u_n)$  admet une suite extraite divergente, alors  $(u_n)$  est divergente. □