

---

**DM2**  
**(Oraux HEC)**

---

**Exercice avec préparation 1**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :  $\forall x > 0, f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$ .

1. a) Question de cours

Rappeler la définition de la continuité en un point d'une fonction réelle d'une variable réelle.

b) Montrer que  $f$  se prolonge de manière unique en une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

2. Justifier, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'égalité :  $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt = \frac{2}{n^3}$ .

3. a) Établir, pour tout  $t > 0$ , l'inégalité :  $\frac{t^2}{e^t - 1} \leq t$ .

b) Justifier, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-nt} dt$ .

c) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-nt} dt = 0$ .

4. a) Établir, pour tout  $t > 0$ , l'égalité :  $f(t) = t^2 \sum_{k=1}^n e^{-kt} + f(t)e^{-nt}$ .

b) En déduire l'égalité :  $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ .

5. a) Justifier, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'inégalité  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \leq \frac{1}{n^2}$ .

b) Compléter les lignes 3 et 5 du script **Scilab** suivant, pour que la fonction **approx** affiche une valeur approchée de l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} f(t) dt$ , avec une précision **epsilon** entrée en argument.

```
1  function I = approx(epsilon)
2      I = 0;
3      n = ??? ;
4      for i = 1:n
5          I = I + ??? ;
6      end ;
7      disp(I, 'integrale = ') ;
8  endfunction
```

**Exercice sans préparation 1**

Soit  $U$  et  $V$  deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , suivant chacune la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

1. a) Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la probabilité  $\mathbb{P}(\lfloor nU \rfloor = \lfloor nV \rfloor)$ .

b) En déduire la probabilité  $\mathbb{P}(U = V)$ .

2. Soit  $A$  la matrice aléatoire  $\begin{pmatrix} U & 1 \\ 0 & V \end{pmatrix}$ .

a) Quelle est la probabilité que  $A$  soit inversible ?

b) Quelle est la probabilité que  $A$  soit diagonalisable ?