DM2

(Oraux HEC 2017)

Exercice avec préparation 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1}$.

1. a) Question de cours
Rappeler la définition de la continuité en un point d'une fonction réelle d'une variable réelle.

Démonstration.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \in I$.
On dit que f est continue en a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, \big(|x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon\big)$$

□

b) Montrer que f se prolonge de manière unique en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas (car pour tout $x \in]0, +\infty[$: $\mathrm{e}^x - 1 \neq 0$).
- Montrons que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
  - Tout d'abord : $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.
  - Ainsi : $f(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = x$.
  - Or : $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$. On en déduit : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ se prolonge donc de manière unique en une fonction continue sur } \mathbb{R}_+, \text{ nulle en } 0.}$$

□

2. Justifier, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\, \mathrm{e}^{-nt}\, dt \ = \ \frac{2}{n^3}$.

Démonstration.

- Méthode 1 : procéder par intégration par parties.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \geqslant 0$.
  - La fonction $t \mapsto t^2 \mathrm{e}^{-nt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Elle est donc continue sur **le segment** $[0, A]$.
    L'intégrale $\displaystyle\int_0^A t^2\, \mathrm{e}^{-nt}\, dt$ est donc bien définie.
  - On procède par intégration par parties (IPP) suivante :

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t^2 & & u'(t) & = & 2\,t \\ v'(t) & = & \mathrm{e}^{-nt} & & v(t) & = & -\dfrac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-nt} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^A t^2 \,\mathrm{e}^{-nt}\, dt &= \left[-\frac{1}{n}\, t^2 \,\mathrm{e}^{-nt} \right]_0^A - \int_0^A 2t \times \left(-\frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-nt} \right) dt \\
&= -\frac{1}{n} \left[t^2 \,\mathrm{e}^{-nt} \right]_0^A + \frac{2}{n} \int_0^A t \,\mathrm{e}^{-nt}\, dt \\
&= -\frac{1}{n} \left(A^2 \,\mathrm{e}^{-nA} - 0 \right) + \frac{2}{n} \int_0^A t \,\mathrm{e}^{-nt}\, dt \\
&= -\frac{1}{n}\, A^2 \,\mathrm{e}^{-nA} + \frac{2}{n} \int_0^A t \,\mathrm{e}^{-nt}\, dt
\end{aligned}$$

- On procède une nouvelle IPP pour calculer $\displaystyle\int_0^A t \,\mathrm{e}^{-nt}\, dt$:

$$\left|\begin{array}{lllllll} u(t) & = & t & & u'(t) & = & 1 \\ v'(t) & = & \mathrm{e}^{-nt} & & v(t) & = & -\frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-nt} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^A t \,\mathrm{e}^{-nt}\, dt &= \left[-\frac{1}{n}\, t \,\mathrm{e}^{-nt} \right]_0^A - \int_0^A -\frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-nt}\, dt \\
&= -\frac{1}{n} \left[t \,\mathrm{e}^{-nt} \right]_0^A + \frac{1}{n} \int_0^A \mathrm{e}^{-nt}\, dt \\
&= -\frac{1}{n} \left(A \,\mathrm{e}^{-nA} - 0 \right) + \frac{1}{n} \left[-\frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-nt} \right]_0^A \\
&= -\frac{1}{n}\, A \,\mathrm{e}^{-nA} - \frac{1}{n^2} \left[\mathrm{e}^{-nt} \right]_0^A \\
&= -\frac{1}{n}\, A \,\mathrm{e}^{-nA} - \frac{1}{n^2} \left(\mathrm{e}^{-nA} - 1 \right) \\
&= -\frac{1}{n}\, A \,\mathrm{e}^{-nA} - \frac{1}{n^2}\,\mathrm{e}^{-nA} + \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\int_0^A t^2 \,\mathrm{e}^{-nt}\, dt &= -\frac{1}{n}\, A^2 \,\mathrm{e}^{-nA} + \frac{2}{n} \left(-\frac{1}{n}\, A \,\mathrm{e}^{-nA} - \frac{1}{n^2}\,\mathrm{e}^{-nA} + \frac{1}{n^2} \right) \\
&= -\frac{1}{n}\, A^2 \,\mathrm{e}^{-nA} - \frac{2}{n^2}\, A \,\mathrm{e}^{-nA} - \frac{2}{n^3}\,\mathrm{e}^{-nA} + \frac{2}{n^3}
\end{aligned}$$

Or :

× $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} A^2 \,\mathrm{e}^{-nA} = \frac{A^2}{\mathrm{e}^{nA}} = 0$ et $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} A \,\mathrm{e}^{-nA} = \frac{A}{\mathrm{e}^{nA}} = 0$, par croissances comparées.

× $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \mathrm{e}^{-nA} = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \int_0^{+\infty} t^2 \,\mathrm{e}^{-nt}\, dt \text{ converge et } \int_0^{+\infty} t^2 \,\mathrm{e}^{-nt}\, dt = \frac{2}{n^3}.}$$

- Méthode 2 : reconnaître un moment d'ordre 2.

  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'intégrale à calculer apparaît, à une constante multiplicative près comme le moment d'ordre 2 d'une v.a.r. de loi exponentielle. Détaillons ce point.

  • Soit X une v.a.r. telle que : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(n)$.
  La v.a.r. X admet pour densité la fonction $g : t \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} n\,\mathrm{e}^{-nt} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{array} \right.$.

  • La v.a.r. X admet un moment d'ordre 2. Donc l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, g(t)\, dt$ converge.
  On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\ g(t)\ dt \ &= \ \int_0^{+\infty} t^2 \times n\mathrm{e}^{-nt}\ dt \quad \textit{(par définition de g)} \\ &= \ n \int_0^{+\infty} t^2\ \mathrm{e}^{-nt}\ dt \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'intégrale impropre } \int_0^{+\infty} t^2\ \mathrm{e}^{-nt}\ dt \text{ converge et : } \int_0^{+\infty} t^2\ \mathrm{e}^{-nt}\ dt = \frac{1}{n}\ \mathbb{E}(X^2).}$$

  • Il reste alors à déterminer $\mathbb{E}\big(X^2\big)$. D'après la formule de Kœnig-Huyghens :

$$\mathbb{E}(X^2) \ = \ \mathbb{V}(X) + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \ = \ \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \ = \ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \ = \ \frac{2}{n^2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-nt}\ dt \ = \ \frac{1}{n}\ \mathbb{E}\big(X^2\big) \ = \ \frac{1}{n}\ \frac{2}{n^2} \ = \ \frac{2}{n^3}.}$$

Commentaire

- Ces deux méthodes présentent des avantages et des inconvénients.
  × La méthode 1 est caculatoire.
  Elle présente l'avantage d'être plutôt générale et de pouvoir être utilisée dans d'autres contextes (lorsque l'intégrale ne se présente pas naturellement sous forme d'un moment).
  Cette technique fait partie de la boîte à outils en ECE et doit être parfaitement maîtrisée.
  La présence du terme t^2 nous oblige ici à faire une double intégration par parties. Cela se traduit par des calculs longs qui sont généralement source d'erreurs. C'est le principal défaut de cette méthode.
  × La méthode 2 est beaucoup plus élégante.
  Elle requiert plus d'initiative puisqu'elle nécessite l'introduction de la v.a.r. X.
  Une fois ce cap passé, le reste de la démonstration se révèle particulièrement simple et rapide.
  Les risques d'erreurs de calcul sont très faible.

  De manière générale, il est vivement conseillé de privilégier la seconde méthode. C'est d'autant plus vrai dans un contexte d'oral HEC où l'on attend des candidats qu'ils soient capables de faire preuve de recul sur leurs apprentissages de l'année et notamment de faire le lien entre des chapitres différents (en l'occurrence « Intégration » et « Variables à densité »).
- Ainsi, pour un calcul d'intégrales du type $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-\lambda\, t}\ dt$ ou $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-\lambda\, t}\ dt$, avec $\lambda > 0$, on pensera toujours à faire aparaître les moments d'ordre 1 et 2 d'une v.a.r. suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
  Il faut aussi appliquer cette méthode aux intégrales du type $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ dt$ ou $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ dt$ où l'introduction d'une v.a.r. qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ s'avère nécessaire.

□

3. ***a)*** Établir, pour tout $t > 0$, l'inégalité : $\dfrac{t^2}{e^t - 1} \leqslant t$.

Démonstration.

- Soit $t > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{e^t-1} \leqslant t \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{t}{e^t-1} \leqslant 1 && \textit{(car } t > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow \quad t \leqslant e^t - 1 && \textit{(car, comme } t > 0,\ e^t - 1 > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow \quad t + 1 \leqslant e^t \end{aligned}$$

- La fonction $h : t \mapsto e^t$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative se situe donc au-dessus de ses tangentes. En particulier, elle se situe au-dessus de sa tangente en 0.
  L'équation de cette tangente est :

$$y \ = \ h'(0)(x-0) + h(0) = x + 1$$

  Ainsi : $\forall t > 0,\ t + 1 \leqslant e^t$.

$$\boxed{\text{Par équivalence : } \forall t > 0,\ \frac{t^2}{e^t - 1} \leqslant t.}$$

Commentaire

- Le membre gauche de l'inégalité souhaitée est un polynôme de degré 1 (c'est l'expression d'une fonction affine). Sa représentation graphique est une droite. C'est ce constat qui doit faire penser à une inégalité de convexité.
- Si on ne pense pas à utiliser une propriété de convexité, on peut aussi résoudre cette question en étudiant le signe de la fonction $x \mapsto e^x - x - 1$.

□

b) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-nt}\, dt$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $t > 0$.

$$f(t)\, e^{-nt} \ = \ \frac{t^2}{e^t - 1}\, e^{-nt} \ \leqslant \ t\, e^{-nt} \qquad \textit{(d'après la question précédente)}$$

- On considère de nouveau la v.a.r. X (introduite en question ***2.***).
  Comme $X \hookrightarrow \mathcal{E}(n)$, X admet une espérance.
  On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \times n\, e^{-nt}\, dt$ est convergente.
  Ainsi, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, e^{-nt}\, dt$ est elle aussi convergente.
  (on ne modifie pas la nature d'une intégrale impropre en multipliant l'intégrande par $\dfrac{1}{n} \neq 0$*)*

- On obtient alors :
  - $\times$ $\forall t > 0,\ 0 \ \leqslant\ f(t)\,\mathrm{e}^{-nt} \ \leqslant\ t\,\mathrm{e}^{-nt}$
  - $\times$ L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt$ est convergente.

  Par critère de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt$ est convergente.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt \text{ converge.}}$$

Commentaire

- L'énoncé demande simplement de montrer la **convergence** de l'intégrale (et non son calcul). Il faut donc s'orienter vers l'utilisation d'un critère de comparaison plutôt que de tenter d'effectuer un calcul.
- On se sert ici de la v.a.r. X introduite en question ***2.*** pour démontrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-nt}$ est convergente. On aurait aussi pu établir cette convergence à l'aide de la première IPP de la question ***2.*** qui permet de démontrer au passage :

$$\int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt \ = \ \frac{2}{n} \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt$$

  Comme on l'a déjà mentionné plus haut, l'utilisation de la v.a.r. X démontre plus de recul sur les objets étudiés. La méthode associée est plus élégante et rapide et doit donc être privilégiée.

$\square$

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt = 0$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $t > 0$. D'après la question ***3.a)*** :

$$0 \ \leqslant\ f(t)\,\mathrm{e}^{-nt} \ \leqslant\ t\,\mathrm{e}^{-nt}$$

  De plus les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt$ sont convergentes.

  Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant +\infty$) :

$$0 \ \leqslant\ \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt \ \leqslant\ \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt$$

Commentaire

La croissance de l'intégration ne peut être énoncée que sous réserve d'existence des objets considérés. Il faut donc penser à rappeler que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt$ sont convergentes.

- Or :
$$\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt \;=\; \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} t\times n\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt \;=\; \frac{1}{n}\,\mathbb{E}(X) \;=\; \frac{1}{n}\times\frac{1}{n} \;=\; \frac{1}{n^2}$$
- On obtient alors :
$$0 \;\leqslant\; \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt \;\leqslant\; \frac{1}{n^2}$$
De plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,dt = 0.}$$

Commentaire

Il n'y a pas, dans le programme ECE, de théorème permettant de passer à la limite sous le symbole d'intégration. Toute tentative de ce genre révèle donc une mauvaise compréhension des objets étudiés.

□

4. a) Établir, pour tout $t>0$, l'égalité : $f(t) = t^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-kt} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}$.

Démonstration.
Soit $t>0$.

$$\begin{aligned}
t^2 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-kt} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt} &= t^2 \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{-t}\right)^k + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt} \\
&= t^2 \times \mathrm{e}^{-t}\,\frac{1-\left(\mathrm{e}^{-t}\right)^n}{1-\mathrm{e}^{-t}} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt} \qquad \textit{(car, comme } t>0 : e^{-t} \neq 1\textit{)} \\
&= t^2 \times \frac{1}{\mathrm{e}^{t}}\,\frac{1-\left(\mathrm{e}^{-t}\right)^n}{1-\mathrm{e}^{-t}} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt} \\
&= t^2\,\frac{1-\mathrm{e}^{-nt}}{\mathrm{e}^{t}-1} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt} \\
&= f(t)\,\left(1-\mathrm{e}^{-nt}\right) + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt} \\
&= f(t)\,\left(1-\cancel{\mathrm{e}^{-nt}}+\cancel{\mathrm{e}^{-nt}}\right) \\
&= f(t)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t>0,\ f(t) = t^2 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-kt} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}}$$

□

b) En déduire l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\forall t > 0,\ f(t) = \sum_{k=1}^{n} t^2\, \mathrm{e}^{-kt} + f(t)\, \mathrm{e}^{-nt}$$

Or :

× pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\, \mathrm{e}^{-kt}\ dt$ est convergente (d'après la question ***2.***). Il en est de même de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} t^2\, \mathrm{e}^{-kt}\right)\ dt$ par linéarité de l'intégration.

× l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-nt}\ dt$ est convergente (d'après la question ***3.b)***).

On en déduit, par linéarité de l'intégration, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} t^2\, \mathrm{e}^{-kt} + f(t)\, \mathrm{e}^{-nt}\right)\ dt$ est convergente. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(t)\ dt &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} t^2\, \mathrm{e}^{-kt} + f(t)\, \mathrm{e}^{-nt}\right)\ dt \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^{+\infty} t^2\, \mathrm{e}^{-kt}\ dt\right) + \int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-nt}\ dt \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^3} + \int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-nt}\ dt \qquad \textit{(d'après la question 2.)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(t)\ dt = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} + \int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-nt}\ dt}$$

- Par ailleurs :

× d'après la question ***3.c)*** : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-nt}\ dt = 0$.

× la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann d'exposant 3 ($3 > 1$).
Elle est donc convergente.

Finalement, par passage à la limite :

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)\ dt & = & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} + \int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-nt}\ dt\right) & & \\
\shortparallel & & \shortparallel & & \\
\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt & & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}\right) + \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-nt}\ dt\right) & = & \displaystyle 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} + 0
\end{array}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(t)\ dt \ = \ 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}}$$

□

Commentaire

Insistons sur le fait que l'on ne peut intégrer de part et d'autre d'une égalité si on n'a pas démontré, au préalable, que les intégrales considérées existent bien. On peut éventuellement repasser par des intégrales sur un segment pour démontrer la convergence.
Cette méthode, plutôt naturelle bien qu'un peu plus longue, est présentée ci-dessous.

- Soit $A > 0$. D'après la question précédente : $\forall t > 0,\ f(t) = t^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-kt} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}$.

  Les fonctions en présence sont continues sur **le segment** $[0, A]$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^A f(t)\ dt &= \int_0^A \left(t^2 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-kt} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\right)\ dt \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^A t^2\,\mathrm{e}^{-kt}\ dt + \int_0^A f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt \qquad \textit{(par linéarité de l'intégration)} \end{aligned}$$

- D'après la question ***3.b)***, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt$ est convergente, ce qui signifie que l'intégrale $\int_0^A f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt$ admet une limite finie lorsque $A \to +\infty$.

$$\lim_{A\to+\infty} \left(\int_0^A f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt\right) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}$$

- Soit $k \in [\![1, n]\!]$. D'après la question ***2.***, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-kt}\ dt$ est convergente, ce qui signifie que l'intégrale $\int_0^A t^2\,\mathrm{e}^{-kt}\ dt$ admet une limite finie en $+\infty$.
  On en déduit que $\sum\limits_{k=1}^{n} \int_0^A f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt$ admet une limite finie lorsque $A \to +\infty$ et :

$$\begin{aligned} \lim_{A\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \int_0^A t^2\,\mathrm{e}^{-kt}\ dt\right) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\lim_{A\to+\infty} \int_0^A t^2\,\mathrm{e}^{-kt}\ dt\right) \qquad \textit{(car cette somme est finie)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-kt}\ dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^3} \end{aligned}$$

- On en conclut que l'intégrale $\int_0^A f(t)\ dt$ admet une limite finie en $+\infty$ et :

$$\lim_{A\to+\infty} \left(\int_0^A f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt\right) = \lim_{A\to+\infty} \left(\int_0^A f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt + \sum_{k=1}^{n} \int_0^A t^2\,\mathrm{e}^{-kt}\ dt\right)$$

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt \qquad\qquad \lim_{A\to+\infty} \left(\int_0^A f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt\right) + \lim_{A\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \int_0^A t^2\,\mathrm{e}^{-kt}\ dt\right)$$

$$\boxed{\text{On en conclut, d'après ce qui précède : } \int_0^{+\infty} f(t)\ dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\ dt\ +\ 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}}$$

5. a) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \leqslant \frac{1}{n^2}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $k \in [\![n, +\infty[\![$. Soit $t \in [k, k+1]$.

$$\begin{array}{lccccc} \text{Comme} & k & \leqslant & t & \leqslant & k+1 \\ \text{alors} & \dfrac{1}{k^3} & \geqslant & \dfrac{1}{t^3} & \geqslant & \dfrac{1}{(k+1)^3} \end{array}$$
(par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ sur $]0, +\infty[$)

$$\boxed{\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{(k+1)^3} \leqslant \frac{1}{t^3} \leqslant \frac{1}{k^3}}$$

- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ est continue sur le **segment** $[k, k+1]$.

  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^3}\, dt$ est bien définie.

  De plus, par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leqslant k+1$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^3}\, dt & \leqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^3}\, dt & \leqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k^3}\, dt \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ \big((k+1)-k\big)\dfrac{1}{(k+1)^3} & & & & \big((k+1)-k\big)\dfrac{1}{k^3} \end{array}$$

- Soit $N \geqslant n$. On obtient, par sommation des inégalités de gauche pour k variant de n à N :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{(k+1)^3} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=n}^{N} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^3}\, dt \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{N+1} \frac{1}{k^3} & & \displaystyle\int_n^{N+1} \frac{1}{t^3}\, dt \end{array}$$
(par relation de Chasles)

  Or :

  × la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ est convergente, donc la suite des sommes partielles associée $(S_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ l'est également. Or pour tout $N \geqslant n$:

$$\sum_{k=n+1}^{N+1} \frac{1}{k^3} = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

  × par ailleurs :

$$\int_n^{N+1} \frac{1}{t^3}\, dt = \left[-\frac{1}{2\, t^2} \right]_n^{N+1} = -\frac{1}{2(N+1)^2} + \frac{1}{2\, n^2} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\, n^2}$$

  On en déduit, par passage à la limite ($N \to +\infty$) dans l'inégalité précédente :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2\, n^2}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \leqslant \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\, n^2} = \frac{1}{n^2}.}$$

□

b) Compléter les lignes 3 et 5 du script **Scilab** suivant, pour que la fonction `approx` affiche une valeur approchée de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$, avec une précision `epsilon` entrée en argument.

```
1 function I = approx(epsilon)
2     I = 0;
3     n = ??? ;
4     for i = 1:n
5         I = I + ??? ;
6     end ;
7     disp(I, 'integrale = ') ;
8 endfunction
```

Démonstration.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2}{k^3}$.
  D'après la question ***4.b)***, la suite (S_n) converge et :
  $$\lim_{n \to +\infty} S_n \ = \ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \ = \ \int_0^{+\infty} f(t)\, dt \ = \ I$$
  Donc, à partir d'un certain rang, les valeurs de S_n sont aussi proches que souhaité de I.
  Autrement dit :
  $$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqslant n_0, \ |S_n - I| < \varepsilon$$
  Pour obtenir une approximation de I (à une précision ε donnée), il suffit donc de calculer S_n pour n suffisamment grand (n plus grand que n_0).
- Il reste à mesurer l'erreur faite lorsque l'on approche I par S_n.
  Autrement dit, on s'intéresse à la distance $|I - S_n|$.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons tout d'abord (d'après la question ***4.b)***) :
  $$I \ = \ \int_0^{+\infty} f(t)\, dt \ = \ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \ = \ \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^3} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \ = \ S_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3}$$
  Donc :
  $$I - S_n \ = \ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3}$$
  Cette somme étant constituée de termes tous positifs, on en déduit :
  $$\boxed{|I - S_n| \ = \ I - S_n \ = \ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3}}$$
- On souhaite obtenir une approximation de I à ε près.
  Autrement dit, on souhaite trouver $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :
  $$|I - S_N| = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \ \leqslant \ \varepsilon$$
  Pour ce faire, il suffit de trouver N tel que :
  $$\frac{1}{N^2} \ \leqslant \ \varepsilon$$
  En effet, dans ce cas on a alors, d'après la question ***5.a)*** :
  $$|I - S_N| \ = \ \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \ \leqslant \ \frac{1}{N^2} \ \leqslant \ \varepsilon$$

Commentaire

On a rappelé plus haut la définition de la convergence pour la suite (S_n).
On note que cette définition, si elle affirme l'existence d'un entier n_0 tel que S_{n_0} soit une valeur approchée de I à ε près, ne dit rien sur la valeur de ce n_0. Cette définition **existentielle** (l'objet existe), ne fournit pas de méthode **constructive** (on ne sait pas comment obtenir la valeur de l'objet). Il faut donc une propriété supplémentaire (ici le résultat de la question ***5.a)***) pour obtenir une valeur convenable pour n_0.

- Or on a :

$$\frac{1}{n^2} \leqslant \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n^2 \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \qquad \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)}$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geqslant \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad \textit{(par stricte croissance de la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)}$$

L'entier $N = \left\lceil \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil$ convient : S_N est alors une approximation de I à ε près.

```
n = ceil(1 / sqrt(epsilon)) ;
```

```
I = I + 2 / (i ^ 3) ;
```

Commentaire

- On remarquera que la présence des « ; » n'est pas nécessaire ici. En effet, ce symbole annule l'affichage des résultats des instructions qui le précèdent. Or, dans une structure du type `function`, aucun résultat, hors la valeur finale de la variable de sortie (ici `I`) n'est visible à l'écran.
- On peut s'interroger sur la présence de la ligne 7 de la fonction dans laquelle la commande d'affichage `disp(I, ' integrale = ')` apparaît. Généralement, on considère que le but d'une fonction est d'effectuer un calcul et pas de réaliser un affichage. C'est un point primordial de l'intérêt de la fonction : le **calcul** effectué par une fonction peut être utilisé ailleurs en réalisant un appel à cette fonction. Si l'on souhaite réaliser un affichage d'un calcul effectué par une fonction, il suffit d'écrire une surcouche d'affichage :

```
eps = input('Prière de choisir la précision souhaitée pour le calcul')
I = approx(eps)
disp(I, ' integrale = ')
```

  Il y a donc dans l'énoncé un mélange des genres qui ne semble pas pertinent.
- Le concepteur a fait le choix du nom `I` pour la variable de sortie. Cela s'explique par le fait qu'on cherche à déterminer une valeur approchée d'une intégrale. Mais cette valeur approchée est obtenue comme une somme finie S_N. Nommer cette variable `S` permettrait sans doute d'éviter des confusions auprès des candidats. □

Exercice sans préparation 1

Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, suivant chacune la loi uniforme sur $[0,1]$.

1. a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbb{P}([\lfloor n\,U \rfloor = \lfloor n\,V \rfloor])$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Déterminons la loi de la v.a.r. $X = \lfloor n\,U \rfloor$. Notons $f : x \mapsto \lfloor n\,x \rfloor$ de sorte que $X = f(U)$.
  - × Commençons par déterminer $X(\Omega)$.
  $$X(\Omega) \ = \ \big(f(U)\big)\,(\Omega) \ = \ f\big(U(\Omega)\big) \ \subset \ [\![0, n]\!]$$
  En effet comme $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, alors : $U(\Omega) = [0,1]$.
  Ainsi : $\big(nU\big)\,(\Omega) = [0, n]$ et $\big(\lfloor nU \rfloor\big)\,(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
  - × Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
  $$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = k]) \ &= \ \mathbb{P}([\lfloor nU \rfloor = k]) \ = \ \mathbb{P}([k \leqslant nU < k+1]) \\ &= \ \mathbb{P}\left(\left[\frac{k}{n} \leqslant U < \frac{k+1}{n}\right]\right) \\ &= \ F_U\left(\frac{k+1}{n}\right) - F_U\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

Commentaire

- Rappelons la définition de la fonction partie entière par défaut :
$$\begin{array}{rcccl} \lfloor\,.\,\rfloor & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ & & x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \ = \ \text{le pus grand entier } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } k \leqslant x \end{array}$$
Il faut en retenir que $\lfloor x \rfloor$ est l'entier directement inférieur à x.
- On utilise dans cette question une autre caractérisation de cette fonction.
Plus précisément :
$$\boxed{\lfloor x \rfloor = k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{n est l'unique entier relatif vérifiant la propriété :} \\ k \leqslant x < k+1 \end{array}}$$
On en déduit donc, dans la question : $[\lfloor nU \rfloor = k] \ = \ [k \leqslant nU < k+1]$.

On rappelle que la fonction de répartition associée à la loi uniforme sur $[0,1]$ est :
$$\begin{array}{rcccl} F_U & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si x} > 1 \end{array}\right. \end{array}$$

Deux cas se présentent alors :

- si $k \in [\![0, n-1]\!]$.
Alors, comme $\left(\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right) \in [0,1]^2$:
$$F_U\left(\frac{k+1}{n}\right) - F_U\left(\frac{k}{n}\right) \ = \ \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \ = \ \frac{1}{n}$$

- si $k = n$.
  Alors, comme $\dfrac{n}{n} = 1 \in [0,1]$ et $\dfrac{n+1}{n} > 1$:
  $$F_U\left(\frac{n+1}{n}\right) - F_U\left(\frac{n}{n}\right) \;=\; \cancel{1} - \cancel{1} \;=\; 0$$

- De même, en notant $Y = \lfloor nV \rfloor$:
  - $\times$ $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$
  - $\times$ $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}([Y = k]) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = n \\ \dfrac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$

- Déterminons maintenant $\mathbb{P}\big([\lfloor nU \rfloor = \lfloor nV \rfloor]\big)$.
  La famille $\big([X = k]\big)_{k\in[\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
  D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([\lfloor nU \rfloor = \lfloor nV \rfloor]\big) & = & \mathbb{P}([X = Y]) \;=\; \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X = Y] \cap [X = k]) & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Y = k] \cap [X = k]) & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Y = k]) \times \mathbb{P}([X = k]) & \textit{(comme U et V sont indépendantes, il en est de même de $\lfloor nU \rfloor$ et $\lfloor nV \rfloor$ d'après le lemme des coalitions)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([Y = k]) \times \mathbb{P}([X = k]) & \textit{(car $\mathbb{P}([X = n]) = 0$)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{n} \;=\; \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=0}^{n-1} 1 \;=\; \dfrac{1}{n^{\cancel{2}}} \cancel{n} \;=\; \dfrac{1}{n} &
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([\lfloor nU \rfloor = \lfloor nV \rfloor]) = \frac{1}{n}}$$

□

b) En déduire la probabilité $\mathbb{P}([U = V])$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons : $[U = V] \subset [\lfloor nU \rfloor = \lfloor vU \rfloor]$.

  Soit $\omega \in [U = V]$. Cela signifie : $U(\omega) = V(\omega)$.
  Donc : $nU(\omega) = nV(\omega)$. D'où : $\lfloor nU(\omega) \rfloor = \lfloor nV(\omega) \rfloor$, autrement dit : $\omega \in [\lfloor nU \rfloor = \lfloor nV \rfloor]$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ [U = V] \subset [\lfloor nU \rfloor = \lfloor nV \rfloor].}$$

- On en déduit, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
  $$0 \;\leqslant\; \mathbb{P}([U = V]) \;\leqslant\; \mathbb{P}([\lfloor nU \rfloor = \lfloor nV \rfloor]) \;=\; \frac{1}{n}$$
  Or :
  - $\times$ $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.
  - $\times$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement, on obtient : } \mathbb{P}\big([U = V]\big) = 0.}$$

□

2. Soit A la matrice aléatoire $\begin{pmatrix} U & 1 \\ 0 & V \end{pmatrix}$.

Commentaire

On prêtera attention à la nature des objets : la matrice aléatoire A est constituée de quatre coefficients qui sont **tous** des variables aléatoires.

- Pour les coefficients U et V, il est clair que ce sont bien des v.a.r.
  On a donc affaire à une matrice de v.a.r.
- Les coefficients de A sont tous de même nature.
  La notation « 1 » désigne donc ici la variable aléatoire constante égale à 1.
  De même, « 0 » est la variable aléatoire constante égale à 0.

a) Quelle est la probabilité que A soit inversible ?

Démonstration.
Considérons l'événement $E = \{\omega \in \Omega \mid A(\omega) \text{ inversible}\}$.

- \- Méthode 1 : à l'aide de la caractérisation de l'inversibilité des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
  Soit $\omega \in \Omega$.
  La matrice $A(\omega)$ est une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
  Elle est donc inversible si et seulement si $\det(A(\omega)) \neq 0_{\mathbb{R}}$. Or :

  $$\det(A(\omega)) \ = \ U(\omega) \times V(\omega) - 0 \times 1 \ = \ U(\omega) \times V(\omega)$$

  Donc :

  $$\det(A(\omega)) \neq 0 \ \Leftrightarrow \ U(\omega) \times V(\omega) \neq 0 \ \Leftrightarrow \ U(\omega) \neq 0 \ \texttt{ET} \ V(\omega) \neq 0$$

  Autrement dit, $A(\omega)$ est inversible si et seulement si : $U(\omega) \neq 0$ ET $V(\omega) \neq 0$, ou encore $\omega \in E$ si et seulement si $\omega \in [U \neq 0] \cap [V \neq 0]$.

  $$\boxed{\text{Ainsi : } E = [U \neq 0] \cap [V \neq 0].}$$

  \- Méthode 2 : à l'aide de la caractérisation de l'inversibilité des matrices triangulaires.
  Soit $\omega \in \Omega$.
  La matrice $A(\omega)$ est triangulaire. Elle est donc inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont **tous** non nuls, c'est-à-dire si : $U(\omega) \neq 0$ ET $V(\omega) \neq 0$.
  Autrement dit, $A(\omega)$ est inversible si et seulement si : $U(\omega) \neq 0$ ET $V(\omega) \neq 0$, ou encore $\omega \in E$ si et seulement si $\omega \in [U \neq 0] \cap [V \neq 0]$.

  $$\boxed{\text{Ainsi : } E = [U \neq 0] \cap [V \neq 0].}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([U \neq 0] \cap [V \neq 0]) & = & \mathbb{P}([U \neq 0]) \times \mathbb{P}([V \neq 0]) & \textit{(car les v.a.r. } U \textit{ et } V \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \Big(1 - \mathbb{P}\Big(\overline{[U \neq 0]}\Big)\Big) \times \Big(1 - \mathbb{P}\Big(\overline{[V \neq 0]}\Big)\Big) & \\ & = & \big(1 - \mathbb{P}\big(\,[U = 0]\,\big)\big) \times \big(1 - \mathbb{P}\big(\,[V = 0]\,\big)\big) & \\ & = & (1 - 0) \times (1 - 0) & \textit{(car } U \textit{ et } V \textit{ sont des v.a.r. à densité)} \\ & = & 1 & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, la probabilité que la matrice aléatoire } A \text{ soit inversible est } 1.}$$

Commentaire

- Comme A est inversible avec probabilité 1, on dit que A est inversible presque sûrement.
- Ce type de questions est assez difficile. Il s'agit de manipuler une matrice de v.a.r. , objet qui n'est pas au programme officiel de la voie ECE. Il faut noter que pour tout $\omega \in \Omega$, $A(\omega)$ n'est rien d'autre qu'une matrice de réels. C'est donc la bonne compréhension de l'objet v.a.r. qui permet de comprendre comment manipuler la **matrice aléatoire** A. Finalement, une fois écrit que l'événement « A est diagonalisable » est l'intersection $[U \neq 0] \cap [V \neq 0]$, la question redevient classique.
- Il faut s'attendre à trouver aux oraux HEC des objets plus originaux dont la bonne compréhesion passe par un niveau de maîtrise important du cours.

$\square$

b) Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

Démonstration.
Considérons l'événement $F = \{\omega \in \Omega \mid A(\omega) \text{ diagonalisable}\}$.

- Soit $\omega \in \Omega$.
  La matrice $A(\omega)$ est triangulaire. Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux $U(\omega)$ et $V(\omega)$. Deux cas se présentent.
  - Si $U(\omega) \neq V(\omega)$, alors la matrice $A(\omega)$:
    - × est d'ordre 2,
    - × admet deux valeurs propres **distinctes**.

    Donc elle est diagonalisable.
  - Si $U(\omega) = V(\omega)$, montrons par l'absurde que $A(\omega)$ n'est pas diagonalisable.
    Supposons que $A(\omega)$ est diagonalisable. Il existe alors une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de $A(\omega)$ telles que : $A(\omega) = PDP^{-1}$.
    Or $U(\omega)$ est la seule valeur propre de $A(\omega)$. Ainsi $D = U(\omega) \cdot I_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ et :

    $$A(\omega) \ = \ PDP^{-1} \ = \ P \times (U(\omega) \cdot I_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}) \times P^{-1} \ = \ U(\omega) \cdot P\,P^{-1} \ = \ U(\omega)\, I_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$$

    Absurde !
    On en déduit que $A(\omega)$ n'est pas diagonalisable.

  Finalement, la matrice $A(\omega)$ est diagonalisable si et seulement si $U(\omega) \neq V(\omega)$, c'est-à-dire $\omega \in F$ si et seulement si $\omega \in [U \neq V]$.

  $\boxed{\text{On en conclut : } F = [U \neq V].}$

- Or, d'après la question ***1.b)*** :

$$\mathbb{P}([U \neq V]) \ = \ 1 - \mathbb{P}\left(\overline{[U = V]}\right) \ = \ 1 - \mathbb{P}([U = V]) \ = \ 1 - 0 \ = \ 1$$

$\boxed{\text{Ainsi la probabilité que la matrice aléatoire } A \text{ soit diagonalisable est 1.}}$

Commentaire

On dit que la matrice aléatoire A est diagonalisable presque sûrement.

$\square$