DM3 vA

(Exercice II EML 2008)

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie I : Réduction simultanée de A et B

1. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer :

$$A - \lambda\, I_3 \text{ non inversible } \Leftrightarrow \lambda \in \{0, -1, 1\}$$

Démonstration.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl}
\text{rg}(A - \lambda\, I_3) & = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
& \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1-\lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1-\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
& \overset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 + (1-\lambda)\,L_1}{=} & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1-\lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 2\,\lambda & \lambda^2+1 \end{pmatrix}\right) \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_2}{=} & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1-\lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda-1) \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

On obtient une réduite triangulaire supérieure.
Donc $A - \lambda\, I_3$ est non inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul.
On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
A - \lambda I_3 \text{ non inversible} & \Leftrightarrow & -\lambda = 0 \ \texttt{OU}\ (\lambda+1)(\lambda-1) = 0 \\
& \Leftrightarrow & \lambda = 0 \ \texttt{OU}\ \lambda = -1 \ \texttt{OU}\ \lambda = 1 \\
& \Leftrightarrow & \lambda \in \{-1, 0, 1\}
\end{array}$$

$$\boxed{A - \lambda\, I_3 \text{ non inversible } \Leftrightarrow \lambda \in \{0, -1, 1\}}$$

□

b) On définit les ensembles suivants :

$$\begin{array}{rcl} E_0(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\} \\ E_{-1}(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\} \\ E_1(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\} \end{array}$$

Montrer que ce sont des espaces vectoriels et déterminer une base de chacun d'entre eux. En déduire leurs dimensions.

Démonstration.

- Déterminons une base de $E_0(A)$.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} X \in E_0(A) & \iff & A\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & - & z & = & 0 \\ -2\,x & - & 2y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & - & z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y \\ z & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

  Finalement, on obtient l'expression de $E_0(A)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl} E_0(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\} \ = \ \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = -y \text{ et } z = 0\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \ = \ \{y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } E_0(A) \text{ est un espace vectoriel.}}$$

On sait donc que la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$:

× engendre $E_0(A)$,

× est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

La famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est donc une base de $E_0(A)$.

Ainsi : $\dim\big(E_0(A)\big) \ = \ \mathrm{Card}\left(\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) \ = \ 1.$

- Déterminons une base de $E_{-1}(A)$.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_0(A) & \Longleftrightarrow & (A + I_3)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[1em]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[1em]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ -2\,x & - & 2y & & & = & 0 \end{array} \right. \\[1em]
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\[1em]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\[1em]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & -z \\ & & y & = & z \end{array} \right. \\[1em]
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & & & = & -2\,z \\ & & y & = & z \end{array} \right.
\end{array}$$

Finalement, on obtient l'expression de $E_{-1}(A)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-1}(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\} \ = \ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = -2z \text{ et } y = z \right\} \\[1em]
& = & \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\[1em]
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

On en déduit que $E_{-1}(A)$ est un espace vectoriel.

On sait donc que la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$:

- $\times$ engendre $E_{-1}(A)$,
- $\times$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{La famille } \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est donc une base de } E_{-1}(A).}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim\big(E_{-1}(A)\big) \ = \ \mathrm{Card}\left(\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) \ = \ 1.}$$

- Déterminons une base de $E_1(A)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_1(A) & \iff & (A - I_3)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[2mm]
& \iff & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2mm]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & z & = & 0 \\ & - & y & - & z & = & 0 \\ -2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ & - & y & - & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ & - & y & - & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2\,x & - & 2\,y & = & 2\,z \\ & & -y & = & z \end{array} \right. \\[2mm]
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2\,L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2\,x & & & = & 0 \\ & & -y & = & z \end{array} \right.
\end{array}$$

Finalement, on obtient l'expression de $E_1(A)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl}
E_1(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\} \ = \ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = 0 \text{ et } y = -z \right\} \\[2mm]
& = & \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\[2mm]
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } E_1(A) \text{ est un espace vectoriel.}}$$

On sait donc que la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$:

× engendre $E_1(A)$,

× est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est donc une base de $E_1(A)$.

Ainsi : $\dim\big(E_1(A)\big) \;=\; \mathrm{Card}\left(\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) \;=\; 1.$

□

2. a) Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Démonstration.
On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{\ L_2 \leftrightarrow L_3$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
Ainsi P est inversible.
On effectue l'opération $\{\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{\ L_1 \leftarrow L_1 + L_2$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

On en conclut que P est inversible et : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

□

b) Montrer : $A = PDP^{-1}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$D\,P^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Ensuite :

$$PDP^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \;=\; A$$

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

□

3. Calculer la matrice $C = P^{-1}\,B\,P$ et vérifier que C est diagonale.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$BP \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ensuite :

$$P^{-1}\,B\,P \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On obtient : } P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = C. \text{ La matrice } C \text{ est bien diagonale.}}$$

□

Partie II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de matrices

On note E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois, et on considère l'application $f : E \to E$ qui, à toute matrice M carrée d'ordre trois, associe $f(M) = AM - MB$.

1. Donner la dimension de E.

Démonstration.
D'après l'énoncé : $E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim(E) \;=\; \dim\big(\mathscr{M}_3(\mathbb{R})\big) \;=\; 3^2 \;=\; 9.}$$

□

2. Vérifier que f est un endomorphisme de E.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que si $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, alors $f(M) = AM - MB \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est à valeurs dans } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) = E.}$$

- Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M_1, M_2) \in E^2$.

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2) &= A(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2) - (\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2)B \\ &= \lambda_1 \cdot AM_1 + \lambda_2 \cdot AM_2 - \lambda_1 \cdot M_1B - \lambda_2 \cdot M_2B \\ &= \lambda_1 \cdot (AM_1 - M_1B) + \lambda_2 \cdot (AM_2 - M_2B) \\ &= \lambda_1 \cdot f(M_1) + \lambda_2 \cdot f(M_2) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que l'application } f \text{ est linéaire.}}$$

□

3. Soit $M \in E$. On note $N = P^{-1}M\ P$, où P est définie en **I.2**.

a) Montrer : $M \in \mathrm{Ker}(f) \ \Leftrightarrow\ DN = NC$.

Démonstration.
On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcll}
M \in \mathrm{Ker}(f) & \Leftrightarrow & f(M) = 0_E \ \Leftrightarrow\ AM - MB = 0_E \ \Leftrightarrow\ AM = MB & \\
& \Leftrightarrow & PDP^{-1} \times PNP^{-1} = PNP^{-1} \times PCP^{-1} & \textit{(d'après les questions précédentes)} \\
& \Leftrightarrow & PDNP^{-1} = PNCP^{-1} & \\
& \Leftrightarrow & P^{-1} \times (PDNP^{-1}) = P^{-1} \times (PNCP^{-1}) & \textit{(en multipliant à gauche par } P^{-1}\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & DNP^{-1} = NCP^{-1} & \\
& \Leftrightarrow & (DNP^{-1}) \times P = (NCP^{-1}) \times P & \textit{(en multipliant à droite par } P\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & DN = NC &
\end{array}$$

$$\boxed{M \in \mathrm{Ker}(f) \ \Leftrightarrow\ DN = NC}$$

□

b) Déterminer les matrices N carrées d'ordre trois telles que : $DN = NC$.

Démonstration.
Dans la suite on note $F = \{N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid DN = NC\}$.
Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
N \in F & \Leftrightarrow & DN = NC \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -d & -e & -f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & -c \\ d & 0 & -f \\ g & 0 & -i \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} a = c = e = h = 0 \\ -d = d \\ -i = i \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \ a = c = d = e = h = i = 0 \right.
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Les matrices } N \text{ vérifiant } DN = NC \text{ sont de la forme } N = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } (b, f, g) \in \mathbb{R}^3.}$$

□

c) Montrer que l'ensemble des matrices N carrées d'ordre trois telles que $DN = NC$ est un espace vectoriel, et en déterminer une base et la dimension.

Démonstration.

- On en déduit :

$$\begin{aligned} F &= \{N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid DN = NC\} \\ &= \{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \mid a = c = d = e = h = i = 0\} \\ &= \{\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (b, f, g) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + g \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (b, f, g) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

  On note :

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{F = \mathrm{Vect}\,(N_1, N_2, N_3) \text{ et donc } F \text{ est un espace vectoriel.}}$$

- Montrons que la famille (N_1, N_2, N_3) est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
  Supposons :

$$\lambda_1 \cdot N_1 + \lambda_2 \cdot N_2 + \lambda_3 \cdot N_3 \ = \ 0_E$$

  Alors :

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  On obtient alors : $\{ \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } (N_1, N_2, N_3) \text{ est libre.}}$$

- Finalement, la famille (N_1, N_2, N_3) :
  × engendre F,
  × est libre dans E.

$$\boxed{\text{La famille } (N_1, N_2, N_3) \text{ est une base de } F.}$$

$$\boxed{\dim(F) \ = \ \mathrm{Card}\left((N_1, N_2, N_3)\right) \ = \ 3}$$

□

4. a) En déduire la dimension de $\ker(f)$.

Démonstration.

- Soit $M \in E$.

$$\begin{array}{rcll} M \in \mathrm{Ker}(f) & \Leftrightarrow & N = P^{-1}MP \in F & \textit{(d'après la question \textbf{3.a)})} \\ & \Leftrightarrow & \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3,\ N = \lambda_1 \cdot N_1 + \lambda_2 \cdot N_2 + \lambda_3 \cdot N_3 & \textit{(d'après la question \textbf{3.c)})} \\ & \Leftrightarrow & \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3,\ P^{-1}MP = \lambda_1 \cdot N_1 + \lambda_2 \cdot N_2 + \lambda_3 \cdot N_3 & \\ & \Leftrightarrow & \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3,\quad M = P\left(\lambda_1 \cdot N_1 + \lambda_2 \cdot N_2 + \lambda_3 \cdot N_3\right) P^{-1} & \\ & & \phantom{\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3,\quad M} = \lambda_1 \cdot PN_1P^{-1} + \lambda_2 \cdot PN_2P^{-1} + \lambda_3 \cdot PN_3P^{-1} & \\ & \Leftrightarrow & M \in \mathrm{Vect}\left(PN_1P^{-1}, PN_2P^{-1}, PN_3P^{-1}\right) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Ker}(f) \ = \ \mathrm{Vect}\left(PN_1P^{-1}, PN_2P^{-1}, PN_3P^{-1}\right).}$$

- Démontrons que la famille $(PN_1P^{-1}, PN_2P^{-1}, PN_3P^{-1})$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
  Supposons :
  $$\lambda_1 \cdot PN_1P^{-1} + \lambda_2 \cdot PN_2P^{-1} + \lambda_3 \cdot PN_3P^{-1} \ = \ 0_E$$
  Or :
  $$\lambda_1 \cdot PN_1P^{-1} + \lambda_2 PN_2P^{-1} + \lambda_3 \cdot PN_3P^{-1} \ = \ P\left(\lambda_1 \cdot N_1 + \lambda_2 \cdot N_2 + \lambda_3 \cdot N_3\right) P^{-1}$$
  Donc :
  $$P\left(\lambda_1 \cdot N_1 + \lambda_2 \cdot N_2 + \lambda_3 \cdot N_3\right) P^{-1} \ = \ 0_E$$
  Ainsi, par multiplication à gauche par P^{-1} puis à droite par P :
  $$\lambda_1 \cdot N_1 + \lambda_2 \cdot N_2 + \lambda_3 \cdot N_3 \ = \ 0_E$$
  Or la famille (N_1, N_2, N_3) est libre d'après la question ***3.c)***.
  Donc : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
  $$\boxed{\text{La famille } (PN_1P^{-1}, PN_2P^{-1}, PN_3P^{-1}) \text{ est libre.}}$$

- On en déduit que la famille $(PN_1P^{-1}, PN_2P^{-1}, PN_3P^{-1})$:
  × engendre $\mathrm{Ker}(f)$,
  × est libre dans E.
  $$\boxed{\text{Donc la famille } (PN_1P^{-1}, PN_2P^{-1}, PN_3P^{-1}) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f).}$$
  $$\boxed{\text{Ainsi : } \dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) \ = \ \mathrm{Card}\left((PN_1P^{-1}, PN_2P^{-1}, PN_3P^{-1})\right) \ = \ 3.}$$

□

b) Donner au moins un élément non nul de $\mathrm{Ker}(f)$ et donner au moins un élément non nul de $\mathrm{Im}(f)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $PN_1P^{-1} \in \mathrm{Ker}(f)$. Or :

$$\begin{aligned} PN_1P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La matrice } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est un élément non nul de } \mathrm{Ker}(f).}$$

- Par définition de l'image d'une application linéaire : $f(I_3) \in \mathrm{Im}(f)$. Or :

$$\begin{aligned} f(I_3) &= A\,I_3 - I_3\,B \;=\; A - B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La matrice } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ est un élément non nul de } \mathrm{Im}(f).}$$

□