DM5

1. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que l'on a $A^2 \neq 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ et calculer A^3.

b) Déterminer une base (a) de $\mathrm{Ker}\,(f)$ ainsi qu'une base (b, c) de $\mathrm{Im}\,(f)$.

c) Montrer que $\mathrm{Im}\,\left(f^2\right) = \mathrm{Ker}\,(f)$.

Dans la suite, on considère un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que : $g^2 \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $g^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$, ce qui signifie que $g \circ g$ n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $g \circ g \circ g$ est l'endomorphisme nul.

3. Que peut-on en déduire sur M la matrice représentative de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?

On se propose maintenant de montrer : $\mathrm{Im}\,\left(g^2\right) = \mathrm{Ker}\,(g)$.

4. ***a)*** Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de g.

b) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que 0 est effectivement la seule valeur propre de g.

c) En déduire, toujours en raisonnant par l'absurde, que g n'est pas diagonalisable.

5. ***a)*** Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$.

b) Montrer que $(\ u, g(u), g^2(u)\ )$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathscr{B}'$.

c) Donner la matrice N de g dans la base $\mathscr{B}'$.

d) Déterminer $\mathrm{Im}(g)$ et donner sa dimension. En déduire une base de $\mathrm{Ker}(g)$.
Pour finir, déterminer $\mathrm{Im}(g^2)$ puis conclure.