DM5

1. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que l'on a $A^2 \neq 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ et calculer A^3.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^2 \neq 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

- Ensuite :

$$A^3 = A\ A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

□

b) Déterminer une base (a) de $\mathrm{Ker}\,(f)$ ainsi qu'une base (b, c) de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Démonstration.

- Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} u \in \mathrm{Ker}(f) & \Longleftrightarrow & f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ & \Longleftrightarrow & AU = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -x & - & y & - & z & = & 0 \\ -x & & & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & - & y & & & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ & - & y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\,x & + & y & = & -2\,z \\ & - & y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\,x & & & = & -2\,z \\ & - & y & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f) &= \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z \ \texttt{ET} \ y = 0\} \\ &= \{(-z,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z \cdot (-1,0,1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\left((-1,0,1)\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a : } \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(a) \text{ avec } a = (-1,0,1).}$$

La famille $\mathcal{F} = \big((-1,0,1)\big)$ est :

× génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$.

× libre car constituée uniquement d'un vecteur $a \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\boxed{\text{La famille } (a) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f).}$$

Commentaire

- On a : $\mathrm{Vect}\,((-1,0,1)) = \mathrm{Vect}\,((1,0,-1))$. On aurait aussi bien pu choisir : $a = (1,0,-1)$.
- De manière générale, si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, alors $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathbb{R}^3$. On en déduit :

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) \leqslant \dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$$

  Plusieurs cas se présentent alors :

  × $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 0$. Ceci équivaut à : $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
  Dans ce cas, l'endomorphisme f est injectif.
  Comme f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel de **dimension finie**, on en déduit que f est bijectif. L'application f est donc un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

  × $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 1$.

  × $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 2$.

  × $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 3$. Comme $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathbb{R}^3$ on en déduit : $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$.
  Ainsi : $\forall u \in \mathbb{R}^3$, $f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et donc : $f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.
- Il est important de ne pas confondre $\mathbb{R}^3$ (l'ensemble des triplets de réels) et $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices colonnes à coefficients réels) et ce même s'il y a une bijection évidente entre ces deux ensembles. Une telle confusion sera systématiquement sanctionnée aux concours. On a notamment :

$$\mathrm{Ker}(f) \ \cancel{=} \ \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = -z \ \texttt{ET} \ y = 0\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

- D'autre part, comme $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$$

Or :

× $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_1)\big) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et donc $f(e_1) = 2e_1 - e_2 - e_3 = (2,-1,-1)$.

× $\text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_2)\big) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc $f(e_2) = e_1 - e_2 = (1, -1, 0)$.

× $\text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_3)\big) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et donc $f(e_3) = 2e_1 - e_2 - e_3 = (2, -1, -1)$.

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \text{Im}(f) & = & \text{Vect}\left((2,-1,-1),(1,-1,0),(2,-1,-1)\right) \\ & = & \text{Vect}\left((2,-1,-1),(1,-1,0)\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a : } \text{Im}(f) = \text{Vect}\left((2,-1,-1),(1,-1,0)\right) \text{ avec } b = (2,-1,-1), \text{ et } c = (1,-1,0).}$$

La famille $\mathcal{F} = \big((2,-1,-1),(1,-1,0)\big)$ est :

× génératrice de $\text{Im}(f)$.

× libre car constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

$$\boxed{\text{La famille } (b, c) \text{ est une base de } \text{Im}(f).}$$

Commentaire

- Rappelons que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  Ainsi, si les coordonnées du triplet (x, y, z) sont nulles hormis la $i^{\text{ème}}$ égale à 1 ($(0,1,0)$ par exemple), l'effet du produit de matrices précédent est de sélectionner la $i^{\text{ème}}$ colonne de A.

- Par ailleurs, rappelons que par définition, la matrice :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \;=\; \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

  est la concaténation des vecteurs colonnes représentatifs des vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$, et $f(e_3)$ dans la base $\mathscr{B}$. Ainsi, la lecture de cette matrice nous fournit directement les égalités :

  × $f(e_1) = 2e_1 - e_2 - e_3 = (2, -1, -1)$.

  × $f(e_2) = e_1 - e_2 = (1, -1, 0)$.

  × $f(e_3) = 2e_1 - e_2 - e_3 = (2, -1, -1)$.

□

c) Montrer que $\text{Im}\left(f^2\right) = \text{Ker}\left(f\right)$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f^2) = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ f) = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \Big(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\Big)^2 = A^2$.

- D'après la question ***1.*** :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- On en déduit, par définition de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^2)$:
  - × $f(e_1) = e_1 - e_3 = (1,0,-1)$.
  - × $f(e_2) = e_1 - e_3 = (1,0,-1)$.
  - × $f(e_3) = e_1 - e_3 = (1,0,-1)$.
- Enfin :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}\left(f^2\right) & = & \mathrm{Vect}\left(f^2(e_1), f^2(e_2), f^2(e_3)\right) \\ & = & \mathrm{Vect}\left((1,0,-1),(1,0,-1),(1,0,-1)\right) \;=\; \mathrm{Vect}\left((1,0,-1)\right) \;=\; \mathrm{Ker}(f) \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}\left(f^2\right) = \mathrm{Ker}(f)}$$

Commentaire

- Grâce au résultat de cette question, on retrouve en particulier : $f^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.
  On a même mieux :
  $$\mathrm{Im}\left(f^2\right) \subset \mathrm{Ker}(f) \;\Leftrightarrow\; f^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$$
  Démontrons cette équivalence.
  $$\begin{array}{rcl} f^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)} & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}^3,\ f^3(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}^3,\ f\left(f^2(x)\right) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}^3,\ f^2(x) \in \mathrm{Ker}(f) \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{Im}\left(f^2\right) \subset \mathrm{Ker}(f) \end{array}$$
  La dernière équivalence provient du fait que : $\mathrm{Im}\left(f^2\right) = \{f^2(x) \mid x \in \mathbb{R}^3\}$.
- On pouvait aussi déterminer, pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, $f^2(e_i)$ par calcul. Par exemple :
  $$\begin{array}{cll} & f^2(e_1) & \\ = & f\left(f(e_1)\right) & \\ = & f\left(2e_1 - e_2 - e_3\right) & \\ = & 2 \cdot f(e_1) - f(e_2) - f(e_3) & \textit{(car } f \textit{ est linéaire)} \\ = & 2 \cdot (2e_1 - e_2 - e_3) - (e_1 - e_2) - (2 \cdot e_1 - e_2 - e_3) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.b)}}\textit{)} \\ = & (4 \cdot e_1 - e_1 - 2 \cdot e_1) + \cancel{(-2 \cdot e_2 + e_2 + e_2)} + (-2 \cdot e_3 + e_3) & \\ = & e_1 - e_3 & \end{array}$$

Dans la suite, on considère un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que : $g^2 \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $g^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$, ce qui signifie que $g \circ g$ n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $g \circ g \circ g$ est l'endomorphisme nul.

3. Que peut-on en déduire sur M la matrice représentative de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?

Démonstration.

- Tout d'abord : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g^2) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g \circ g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)\Big)^2 = M^2$.
- De même : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g^3) = M^3$.
- Enfin : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}\right) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } M^2 \neq 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \text{ et } M^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

Commentaire

- L'endomorphisme g est tel que : $g^2 \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $g^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$. On dit qu'il est **nilpotent** d'indice 3. Par définition, l'indice de nilpotence (d'un endomorphisme nilpotent !) est le plus petit entier n tel que : $g^n = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.
- Dans cette question, on démontre :

L'endomorphisme f est nilpotent d'indice 3	$\Rightarrow$	La matrice carrée M est nilpotente d'indice 3

où $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
Ce résultat est une équivalence. Le sens réciproque se démontre à l'aide de la passerelle matrice endomorphisme (bijection réciproque de l'isomorphisme de représentation).

☐

On se propose maintenant de montrer : $\mathrm{Im}\left(g^2\right) = \mathrm{Ker}\,(g)$.

4. a) Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de g.

Démonstration.
D'après l'énoncé : $g^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.
On en déduit que le polynôme $P(X) = X^3$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme g.
Ainsi : $\mathrm{Sp}(g) \subset \{\text{racines de } P\}$.

$$\boxed{\text{La seule valeur propre possible de } g \text{ est } 0.}$$

☐

b) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que 0 est effectivement la seule valeur propre de g.

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord :

$$\begin{aligned} 0 \text{ est valeur prorpe de } g \quad & \Leftrightarrow \quad g - 0 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} \text{ n'est pas injectif} \\ & \Leftrightarrow \quad g \text{ n'est pas bijectif} \qquad \textit{(car } \mathbb{R}^3 \textit{ est de dimension finie)} \end{aligned}$$

- On procède par l'absurde.
  Supposons que g est bijectif. Alors, en composant par f^{-1} de part et d'autre de l'égalité fournie par l'énoncé, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} f^{-1} \circ f^3 & = & f^{-1} \circ 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ f^2 & & 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)} \end{array}$$

  Ceci contredit l'hypothèse de l'énoncé.

$$\boxed{\text{On en conclut que } g \text{ n'est pas bijectif. Ainsi, 0 est bien valeur propre de } g. \text{ D'après la question précédente, c'est la seule valeur propre de } g.}$$

Commentaire

- De manière générale, on peut démontrer, en procédant comme dans les questions ***4.a)*** et ***4.b)*** que les endomorphismes possèdent 0 comme unique valeur propre.
- En particulier, un endomorphisme nilpotent n'est jamais bijectif.

☐

c) En déduire, toujours en raisonnant par l'absurde, que g n'est pas diagonalisable.

Démonstration.
On procède par l'absurde.

- Supposons que g est diagonalisable. Il existe alors une base $\mathscr{B}'$ dans laquelle la représentation matricielle de g est une matrice diagonale et dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de g.
- Par la formule de changement de base, on obtient :

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \times & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(g) & \times & \left(P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\right)^{-1} & & \\ \shortparallel & & & & \shortparallel & & & & \\ M & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \times & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \times & \left(P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\right)^{-1} & = & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \end{array}$$

  Par suite : $M^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \times 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé.

$$\boxed{\text{Ainsi, } g \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

- On a présenté ici une démonstration axée endomorphisme. On aurait aussi pu faire une démonstration axée matrice carrée. En effet, rappelons :

$$g \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow M \text{ est diagonalisable}$$

  où M est une matrice représentative de l'endomorphisme g. Ainsi, on peut toujours se ramener à un problème de diagonalisabilité des matrices carrées.
- Détaillons ce procédé.
  On procède par l'absurde.
  Supposons que g est diagonalisable. **On en déduit alors que M l'est.**
  Il existe donc une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$M = PDP^{-1}$$

  où D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M. Comme M a pour seule valeur propre 0 : $D = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Et ainsi :

$$M \ = \ P\, 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\, P^{-1} \ = \ 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

  Par suite : $M^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \times 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé.
- Cette dernière démonstration a l'avantage de pouvoir être utilisée que l'exerice soit axé sur les endomorphismes ou sur les matrices carrées. Il est vivement conseillé de la connaître : si cette démonstration n'apparaît pas comme résultat dans le programme officiel, elle est présente à chaque session de concours.

□

5. a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Par hypothèse : } g^2 \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}\text{. Il existe donc } u \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que : } g^2(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}.}$$

□

b) Montrer que $(\ u, g(u), g^2(u)\ )$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathscr{B}'$.

Démonstration.

- Démontrons que la famille $(u, g(u), g^2(u))$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
  Supposons : $\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot g(u) + \lambda_3 \cdot g^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ $(*)$.
  - Par linéarité de g^2, on obtient, en appliquant g de part et d'autre de l'égalité :

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 \cdot g^2(u) + \lambda_2 \cdot \cancel{g^3(u)} + \lambda_3 \cdot \cancel{g^4(u)} & = & g^2\left(0_{\mathbb{R}^3}\right) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \lambda_1 \cdot g^2(u) & & 0_{\mathbb{R}^3} \end{array}$$

    En effet, comme $g^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ alors $g^4 = g \circ 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)} = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.
    Et en particulier : $g^3(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $g^4(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\boxed{\text{Comme } \lambda_1 \cdot g^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \text{ et } g^2(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}, \text{ alors : } \lambda_1 = 0.}$$

  - L'égalité $(*)$ se réécrit alors : $\lambda_2 \cdot g(u) + \lambda_3 \cdot g^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
    En appliquant g de part et d'autre, on obtient alors :

$$\lambda_2 \cdot g^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\boxed{\text{On en déduit alors : } \lambda_2 = 0.}$$

  - L'égalité $(*)$ se réécrit alors : $\lambda_3 \cdot g^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \lambda_3 = 0.}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } (u, g(u), g^2(u)) \text{ est bien libre.}}$$

- La famille $\mathcal{F} = (u, g(u), g^2(u))$ est :
  - libre.
  - telle que : $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \mathcal{F} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

□

c) Donner la matrice N de g dans la base $\mathscr{B}'$.

Démonstration.
Nommons : $e_1' = u$, $e_2' = g(u)$ et $e_3' = g^2(u)$.
Il s'agit de déterminer l'image de la base $\mathscr{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ par l'application g.

- $g(e_1') = g(u) = e_2'$. On en déduit : $\text{Mat}_{(e_1',e_2',e_3')}\big(g(e_1')\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $g(e_2') = g(g(u)) = e_3'$. On en déduit : $\text{Mat}_{(e_1',e_2',e_3')}\big(g(e_2')\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $g(e_3') = g(g^2(u)) = g^3(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On en déduit : $\text{Mat}_{(e_1',e_2',e_3')}\big(g(e_3')\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } N = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

d) Déterminer $\mathrm{Im}(g)$ et donner sa dimension. En déduire une base de $\mathrm{Ker}(g)$.
Pour finir, déterminer $\mathrm{Im}(g^2)$ puis conclure.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Im}(g) & = & \mathrm{Vect}\,(g(e'_1), g(e'_2), g(e'_3)) & \\ & = & \mathrm{Vect}\,(e'_2, e'_3, 0_{\mathbb{R}^3}) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \mathrm{Vect}\,\big(g(u), g^2(u)\big) & \textit{(par définition des éléments de } \mathscr{B}'\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}\,\big(g(u), g^2(u)\big)}$$

- La famille $\big(g(u), g^2(u)\big)$ est :
  - × libre car c'est une sous-famille de $\mathscr{B}'$ qui est libre en tant que base de $\mathbb{R}^3$.
  - × génératrice de $\mathrm{Im}(g)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que la famille } \big(g(u), g^2(u)\big) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(g). \\ \text{Et ainsi : } \dim(\mathrm{Im}(g)) = \mathrm{Card}\,\big((g(u), g^2(u))\big) = 2.\end{array}}$$

- D'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim\big(\mathbb{R}^3\big) & = & \dim\big(\mathrm{Ker}(g)\big) & + & \dim\big(\mathrm{Im}(g)\big) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 3 & & & & 2 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim\big(\mathrm{Ker}(g)\big) = 1.}$$

- Par ailleurs : $g(e'_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Ce qui signifie : $e'_3 \in \mathrm{Ker}(g)$. On a alors :

$$\mathrm{Vect}\,\big(e'_3\big) \subset \mathrm{Ker}(g)$$

  Or, comme $e'_3 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$: $\dim\big(\mathrm{Vect}\,(e'_3)\big) = 1$. Et ainsi :

$$\dim\Big(\mathrm{Vect}\,\big(e'_3\big)\Big) = 1 = \dim\big(\mathrm{Ker}(g)\big)$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect}\,(e'_3).}$$

- Enfin, de la même manière que précédemment :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(g^2) & = & \mathrm{Vect}\,\big(g^2(e'_1), g^2(e'_2), g^2(e'_3)\big) \\ & = & \mathrm{Vect}\,\big(g^2(u), g^2(g(u)), g^2(g^2(u))\big) \\ & = & \mathrm{Vect}\,(e'_3, 0_{\mathbb{R}^3}, 0_{\mathbb{R}^3}) \ = \ \mathrm{Vect}\,(e'_3) \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}(g^2) = \mathrm{Vect}\,(e'_3)}$$

$$\boxed{\text{Cela permet de conclure l'exercice : } \mathrm{Im}(g^2) = \mathrm{Vect}\,(e'_3) = \mathrm{Ker}(g).}$$

□