DS1 (version A)

I. Exercice 1

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** Calculer $(A-3I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. On note $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 3X\}$.

a) Résoudre l'équation $AX = 3X$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

b) En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F.

3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P^{-1}A^nP = T^n$.

4. ***a)*** Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = 3I + N$.

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
Le résultat devra faire apparaître T^n comme combinaison linéaire de I et de N.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin T^n comme combinaison linéaire de I et de T.

5. ***a)*** Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n3^{n-1}A - (n-1)3^nI$.

b) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

II. Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$$

1. *Variation de f*

a) Calculer la dérivée f' de f.

b) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution α et une seule sur $\mathbb{R}_+$.
Pour ce faire, on étudiera la variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = (1 - x)\ e^x + 1$$

c) Prouver que : $f(\alpha) = \alpha - 1$.

d) Dresser le tableau de variation de f et donner l'allure du graphe de cette fonction.

2. *Approximation de α*
Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$\varphi(x) = 1 + e^{-x}$$

a) Prouver que α est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$.

b) Montrer que $\alpha > 1$. En déduire que :

$$\alpha - 1 < e^{-1}$$

c) Établir que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1 :

$$\varphi(x) \geqslant 1$$

et que

$$|\varphi(x) - \alpha| \leqslant e^{-1}\,|x - \alpha|$$

d) Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $[1; +\infty[$ définie par la condition initiale $\alpha_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\alpha_{n+1} = \varphi(\alpha_n)$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|\alpha_n - \alpha| \leqslant e^{-(n+1)}$$

e) En déterminant au préalable le nombre d'itérations nécessaires, écrire en **Scilab** un programme permettant de trouver et d'**afficher** une valeur décimale approchée $\tilde{\alpha}$ de α telle que :

$$|\tilde{\alpha} - \alpha| \leqslant 10^{-6}$$

Exercice 3

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de classe C^2, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x^2)$$

et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
On donne la valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.

Partie I : Étude de f et tracé de $\mathcal{C}$

1. ***a)*** Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de f.

c) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

3. Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

4. Tracer $\mathcal{C}$. On utilisera un repère orthonormé d'unité graphique 2 centimètres, et on précisera la tangente à $\mathcal{C}$ en l'origine et en chacun des points d'inflexion.

5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x f(x) dx$.
A cet effet, on pourra utiliser le changement de variable défini par $t = 1 + x^2$.

Partie II : Étude d'une suite et d'une série associées à f

On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante.

2. Établir que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

3. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche un entier n tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$.

4. ***a)*** Établir : $\forall x \in [0;1], \; f(x) \leqslant x - \dfrac{1}{2}x^2$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n^2 \leqslant 2\,(u_n - u_{n+1})$.

c) Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n^2$ converge.

Exercice 4

On définit la fonction :

$$f : [2,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

1. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 2$ on a :

$$\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit l'intégrale :

$$I_n = \int_2^n f(x)\ dx$$

a. En utilisant l'inégalité de la première question, démontrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

b. On définit la fonction F suivante :

$$F : [2,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

Calculer la dérivée de F, en déduire une expression de I_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de $I_n - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

3. On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$$

a. Pour tout k entier supérieur ou égal à trois, montrer qu'on a :

$$\int_k^{k+1} f(x)\ dx \leqslant \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\ dx$$

b. En déduire que : $\forall n \geqslant 3,\ I_{n+1} \leqslant S_n \leqslant I_n + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

c. Démontrer que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

4. On se donne un réel α et on définit, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k^2-1)^{\alpha}}$$

a. Dans cette question, $\alpha = 1$. Trouver deux réels a et b tels que :

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}$$

En déduire une expression de T_n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

b. Pour quelles valeurs de α la suite (T_n) est-elle convergente ?