DS1 (version A) /147

I. Exercice 1 /30

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

1. *a)* Calculer $(A - 3I)^2$.

- **1 pt**

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

- **1 pt : calcul**
- **1 pt : multiplication externe**

2. On note $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 3X\}$.

a) Résoudre l'équation $AX = 3X$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- **2 pts : résolution**

b) En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F.

- **1 pt : écriture sous forme de sev engendré**
- **1 pt : famille génératrice**
- **1 pt : famille libre**
- **1 pt : conclusion**

3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

- **3 pts**

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- **2 pts**

c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P^{-1}A^nP = T^n$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

4. *a)* Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = 3I + N$.

- **1 pt**

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- **1 pt : calcul de N^2**
- **1 pt : récurrence immédiate**

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
Le résultat final devra faire apparaître T^n comme combinaison linéaire de I et de N.

- **1 pt : $3I$ et N commutent**
- **1 pt : découpage valable car $n \geqslant 1$**
- **1 pt : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0$**
- **1 pt : $I^{n-k} = I$**
- **1 pt : formule finale**
- **1 pt : cas $n = 0$**

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin T^n comme combinaison linéaire de I et de T.

- **1 pt**

5. a) Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n3^{n-1}A - (n-1)3^nI$.

- **2 pts : utilisation de $A^n = PT^nP^{-1}$**

b) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

- **1 pt**

II. Exercice 2 /39

L'objet de ce problème est la recherche du comportement asymptotique du maximum sur $[0,1]$ d'une suite de fonction.
Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x + 1}$$

1. *Variation de f*

a) Calculer la dérivée f' de f.

- **1 pt : f dérivable**
- **1 pt : calcul f'**

b) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution α et une seule sur $\mathbb{R}_+$.
Pour ce faire, on étudiera la variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = (1-x)\ \mathrm{e}^x + 1$$

- **1 pt : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$**
- **1 pt : g dérivable et g'**
- **1 pt : variations de g (dont limites)**
- **3 pts : théorème de la bijection (hypothèses, intervalle image, $0 \in]-\infty, 2]$)**

c) Prouver que : $f(\alpha) = \alpha - 1$.

- **2 pts**

d) Dresser le tableau de variation de f et donner l'allure du graphe de cette fonction.

- **2 pts : tableau de variations (variations + limites)**
- **4 pts : courbe (2 tangentes, placer α, allure générale)**

2. *Approximation de α*

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$\varphi(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$$

a) Prouver que α est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$.

- **2 pts : équivalence (dont 1 pt : e$^{-x} > 0$)**
- **1 pt : solution unique**

b) Montrer que $\alpha > 1$. En déduire que :

$$\alpha - 1 < \mathrm{e}^{-1}$$

- **1 pt : calcul $g(\alpha)$, $g(1)$**
- **1 pt : application de g−1**
- **1 pt : φ strictement décroissante**
- **1 pt : application de φ**

c) Établir que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1 :

$$\varphi(x) \geqslant 1$$

et que

$$|\varphi(x) - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-1} |x - \alpha|$$

- **1 pt : $\varphi(x) \geqslant 1$**
- **4 pts : IAF (φ dérivable, inégalité sur φ', $(x, \alpha) \in [1, +\infty[^2$, $\varphi(\alpha) = \alpha$)**

d) Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $[1; +\infty[$ définie par la condition initiale $\alpha_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\alpha_{n+1} = \varphi(\alpha_n)$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|\alpha_n - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-(n+1)}$$

- **1 pt : $\alpha_n \geqslant 1$**
- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité**

e) En déterminant au préalable le nombre d'itérations nécessaires, écrire en **Scilab** un programme permettant de trouver et d'**afficher** une valeur décimale approchée $\tilde{\alpha}$ de α telle que :

$$|\tilde{\alpha} - \alpha| \leqslant 10^{-6}$$

- **1 pt : transitivité**
- **2 pts : valeur de N (équivalence + $N \in \mathbb{N}$)**
- **3 pts : programme (initialisation, boucle for, disp)**

III. Exercice 3 /47

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de classe C^2, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x^2)$$

et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
On donne la valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.

Partie I : Étude de f et tracé de $\mathcal{C}$ /24

1. *a)* Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$.

- **1 pt : f dérivable**
- **1 pt : calcul f'**

b) En déduire le sens de variation de f.

- **1 pt : variations de f**
- **2 pts : limite en $+\infty$ (dont 1 pt : résultat seul)**
- **1 pt : limite en $-\infty$**

c) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.

- **1 pt**

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

- **3 pts (si non obtenus en *1.b)*)**

3. Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

- **2 pts (définition, coordonnées)**

4. Tracer $\mathcal{C}$. On utilisera un repère orthonormé d'unité graphique 2 centimètres, et on précisera la tangente à $\mathcal{C}$ en l'origine et en chacun des points d'inflexion.

- **3 pts : équations des tangentes**
- **3 pts : courbe (tangentes, points d'inflexion, allure générale)**

5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx$.
A cet effet, on pourra utiliser le changement de variable défini par $t = 1 + x^2$.

- **3 pts : changement de variables ($\mathcal{C}^1$, dx, bornes)**
- **3 pts : reste du calcul**

Partie II : Étude d'une suite et d'une série associées à f /23

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

- **1 pt : $f(x) \leqslant x$**
- **1 pt : $u_{n+1} \leqslant u_n$**

2. Établir que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

- **1 pt :** $f(x) \geqslant 0$
- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**
- **1 pt : théorème de convergence monotone**
- **1 pt : continuité de** f
- **1 pt : points fixes de** f

3. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche un entier n tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$.

- **4 pts (initialisation, condition while, mise à jour** n **et** u**, disp)**

4. ***a)*** Établir : $\forall x \in [0;1],\ f(x) \leqslant x - \dfrac{1}{2}x^2$.

- **3 pts**

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 \ \leqslant\ 2\ (u_n - u_{n+1})$.

- **1 pt :** $x^2 \leqslant 2(x - f(x))$
- **1 pt :** $u_n \in [0,1]$
- **1 pt : reste**

c) Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge.

- **1 pt :** $\sum (u_n - u_{n+1})$ **converge (série télescopique)**
- **3 pts : critère de comparaison des SATP (termes généraux** $\geqslant 0$**, comparaison, la série télescopique converge). -1 si le critère est mal cité**

Exercice 4 /31

On définit la fonction :

$$\begin{array}{rccc} f & : & [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{array}$$

1. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 2$ on a :

$$\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

- **1 pt :** $\dfrac{1}{x} \leqslant f(x)$
- **2 pts :** $f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_2^n f(x)\ dx$

a. En utilisant l'inégalité de la première question, démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

- **1 pt : sommation**
- **1 pt : bornes dans l'ordre croissant**
- **1 pt : théorème de comparaison**

b. On définit la fonction F suivante :

$$F \ : \ \begin{array}{rcl} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x+\sqrt{x^2-1}) \end{array}$$

Calculer la dérivée de F, en déduire une expression de I_n en fonction de n.

- **1 pt : F est dérivable (même en cas d'argument vague)**
- **1 pt : dérivée de F**
- **1 pt : I_n**

c. Déterminer la limite de $I_n - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

- **1 pt : écriture de $I_n - \ln(n)$ (ne pas écrire $\lim\limits_{n\to+\infty}$ dans un premier temps)**
- **1 pt : limite**

3. On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$$

a. Pour tout k entier supérieur ou égal à trois, montrer qu'on a :

$$\int_k^{k+1} f(x)\ dx \leqslant \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\ dx$$

- **1 pt : f décroissante sur $[2,+\infty[$**
- **1 pt : croissance de l'intégrale**
- **1 pt : bornes dans l'ordre croissant**
- **1 pt : même démo sur $[k,k+1]$**

b. En déduire que : $\forall n \geqslant 3,\ I_{n+1} \leqslant S_n \leqslant I_n + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

- **1 pt : sommation**
- **1 pt : faire apparaître I_n et I_{n+1}**
- **1 pt : $I_{n+1} +$ quantité $\geqslant I_{n+1}$ car quantité $\geqslant 0$**
- **1 pt : calcul de $f(2)$**

c. Démontrer que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

- **1 pt : écrire le quotient**
- **1 pt : limite du terme de droite**
- **1 pt : limite du terme de gauche**
- **1 pt : bonus si les deux limites sont déterminées correctement**
- **1 pt : rédaction théorème d'encadrement (ce n'est pas un passage à la limite)**

4. On se donne un réel α et on définit, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k^2-1)^\alpha}$$

a. Dans cette question, $\alpha = 1$. Trouver deux réels a et b tels que :

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}$$

En déduire une expression de T_n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

- **1 pt : déterminer a et b**
- **1 pt : télescopage**
- **1 pt : conclusion**

b. Pour quelles valeurs de α la suite (T_n) est-elle convergente ?

- **1 pt : cas $\alpha < 0$**
- **2 pts : cas $\alpha \geqslant 0$**