DS1 (version A)

I. Exercice 1 (inspiré de EDHEC 2016)

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $(A - 3I)^2$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $A - 3I \ = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

  Ainsi :
$$(A - 3I)^2 \ = \ \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(A - 3I)^2 = 0}$$

□

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $(A - 3I)^2 = 0$. Or :
$$(A - 3I)^2 \ = \ A^2 - 6A + 9I$$

- On en déduit que :
$$\begin{array}{ll} & A^2 - 6A + 9I = 0 \\ \text{donc} & A^2 - 6A = -9I \\ \text{et} & A\,(A - 6I) = -9I \\ \text{ainsi} & A\,\left(\dfrac{-1}{9}\,(A - 6I)\right) = I \end{array}$$

  On en déduit que la matrice A est inversible d'inverse $\dfrac{-1}{9}\,(A - 6I)$.

$$\boxed{A^{-1} = \dfrac{-1}{9}\,(A - 6I)}$$

Commentaire

- Il n'y a pas de division opérant dans le monde des matrices. Ainsi, il est impropre d'écrire : $\dfrac{A}{9}$. (l'écriture $\dfrac{A}{B}$ avec A et B deux matrices est elle aussi impropre).
- Par contre, il existe un opérateur de multiplication externe noté $\cdot$.
  L'écriture correcte est : $\dfrac{1}{9} \cdot A$.

□

2. On note $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 3X\}$.

a) Résoudre l'équation $AX = 3X$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Démonstration.

Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Réécrivons le système :

$$\begin{array}{rcl}
AX = 3X & \iff & (A - 3I)\ X = 0 \\
& \iff & \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ -4x & - & 2y & + & 4z & = & 0 \\ -4x & - & 2y & + & 4z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} z & = & x & + & \frac{1}{2}\ y \end{array} \right.
\end{array}$$

Notons F l'ensemble des solutions de cette équation.

$$\begin{array}{rcl}
F & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z = x + \dfrac{1}{2}\ y \right\} \ = \ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x + \frac{1}{2}\ y \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
& = & \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

□

Commentaire

- Lors de la résolution, on a choisi d'exprimer z à l'aide des variables auxiliaires x et y, obtenant ainsi l'équation : $2z = 2x + y$.
- On aurait choisir d'exprimer :

  1) x en fonction de y et z. On obtient alors l'équation : $2x = -y + 2z$.

  2) y en fonction de y et z. On obtient alors l'équation : $y = -2x + 2z$.
- Ce choix n'est pas si anodin car il modifie les deux vecteurs de la famille engendrant F :

  1) $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

  2) $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
- On trouve des bases différentes pour F mais évidemment, cela ne modifie en rien l'espace vectoriel F en lui-même.

b) En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de F.

Démonstration.

- D'après la question précédente, F est le sous-espace vectoriel engendré par deux matrices de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :
  × génératrice de F,
  × libre car elle contient **deux** vecteurs non colinéaires.

  C'est donc une base de F.

$$\boxed{\text{La famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de l'espace vectoriel } F.}$$

□

3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

Démonstration.
On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ L_3 \leftarrow 2\, L_3 - L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue enfin l'opération $\left\{ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}\, L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

On remarque que la matrice P est constituée des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$. C'est ce choix qui va permettre d'exprimer par la suite la matrice A sous une forme plus simple. On en reparlera dans le chapitre « Applications linéaires ».

□

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- Notons tout d'abord que :

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- Enfin :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.}$$

□

c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P^{-1}A^nP = T^n$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : P^{-1}A^nP = T^n$.

▸ **Initialisation**

- D'une part : $P^{-1}A^0P = P^{-1}IP = P^{-1}P = I$.
- D'autre part : $T^0 = I$.

On en déduit que $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $P^{-1}A^{n+1}P = T^{n+1}$).

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T \times T^n \\ &= P^{-1}AP \ \times \ P^{-1}A^nP && \textit{(d'après la quesiton précédente et par hypothèse de récurrence)} \\ &= P^{-1}A(PP^{-1})A^nP \\ &= P^{-1}AIA^nP \ = \ P^{-1}A^{n+1}P \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ P^{-1}A^nP = T^n.}$$

□

4. a) Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = 3I + N$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après l'énoncé, } N = T - 3 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0$.

$$\boxed{\text{En conclusion : } N^0 = I,\ N^1 = N \text{ et pour tout } k \geqslant 2,\ N^k = 0.}$$

Commentaire

- Au lieu de faire une récurrence, on peut aussi écrire, pour tout $k \geqslant 2$:

$$N^k = N^{k-2} \times N^2 = N^{k-2} \times 0 = 0$$

- On insiste sur le fait que cette démonstration n'est valable que si $k \geqslant 2$ (si ce n'est pas le cas, alors $k - 2 < 0$).

□

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
Le résultat devra faire apparaître T^n comme combinaison linéaire de I et de N.

Démonstration.

- Les matrices $3I$ et N commutent (car la matrice I commute avec toutes les matrices).
On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
T^n &= (3\,I + N)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3\,I)^{n-k}\ N^k \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}\ I^{n-k}\ N^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}\ I\ N^k \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}\ N^k & &\textit{(car on a : } \forall j \in \mathbb{N},\ I^j = I\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 3^{n-k}\ N^k + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}\ N^k & &\textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 3^{n-k}\ N^k & &\textit{(car on a montré : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0\textit{)} \\
&= \binom{n}{0} 3^n\ N^0 + \binom{n}{1} 3^{n-1}\ N^1 \\
&= 3^n I + n\ 3^{n-1}\ N
\end{aligned}$$

- Enfin : $3^0\ I + 0\ 3^{-1}\ N = I$ et $T^0 = I$.
La formule précédente reste valable pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ T^n = 3^n\ I + n\ 3^{n-1}\ N.}$$

Commentaire

- Comme noté dans la démonstration, l'hypothèse $n \geqslant 1$ est essentielle pour pouvoir découper la somme. Le cas $n = 0$ doit donc être traité à part.
- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$.

□

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin T^n comme combinaison linéaire de I et de T.

Démonstration.
Comme $N = T - 3I$, on obtient :

$$T^n \ = \ 3^n\ I + n\ 3^{n-1}\ (T - 3I) \ = \ 3^n\ I + n\ 3^{n-1}\ T - n\ 3^n\ I \ = \ n\ 3^{n-1}\ T - (n-1)\ 3^n\ I$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ T^n = n\ 3^{n-1}\ T - (n-1)\ 3^n\ I.}$$

□

5. a) Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n3^{n-1}A - (n-1)3^n I$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $T^n = n\ 3^{n-1}\ T - (n-1)\ 3^n\ I$.
Or : $A = P\ T^n\ P^{-1}$. En combinant ces deux informations, on obtient :

$$\begin{aligned} A^n &= P\ T^n\ P^{-1} \ = \ P\ (n\ 3^{n-1}\ T - (n-1)\ 3^n\ I)\ P^{-1} \\ &= n\ 3^{n-1}\ P\ T\ P^{-1} - (n-1)\ 3^n\ P\ P^{-1} \\ &= n\ 3^{n-1}\ A - (n-1)\ 3^n\ I \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = n\ 3^{n-1}\ A - (n-1)\ 3^n\ I.}$$

□

b) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

Démonstration.
Si $n = -1$, on obtient :

$$\begin{aligned} n\ 3^{n-1}\ A - (n-1)\ 3^n\ I &= (-1)\ 3^{-1-1}\ A - (-1-1)\ 3^{-1}\ I \\ &= (-1)\ \frac{1}{3^2}\ A - (-2)\ \frac{1}{3}\ I \ = \ -\frac{1}{9}\ A + \frac{2}{3}\ I \\ &= -\frac{1}{9}(A - 6I) \ = \ A^{-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la formule trouvée à la question } \textbf{\textit{5.a)}} \text{ reste valable pour } n = -1.}$$

□

II. Exercice 2 (ESCP 1991-G)

Partie I : Étude du maximum d'une fonction

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$$

1. *Variation de f*

a) Calculer la dérivée f' de f.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car c'est le quotient de :
  - × $x \mapsto x$, dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
  - × $x \mapsto e^x + 1$, dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.
    (on a même : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x + 1 > 0$)
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$f'(x) = \frac{(e^x + 1) - x\ e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x - x\ e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \frac{(1 - x)\ e^x + 1}{(e^x + 1)^2}}$$

□

b) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution α et une seule sur $\mathbb{R}_+$.
Pour ce faire, on étudiera la variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = (1 - x)\ e^x + 1$$

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{(1 - x)\ e^x + 1}{(e^x + 1)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (1 - x)\ e^x + 1 = 0 \qquad \textit{(car } (e^x + 1)^2 > 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad g(x) = 0 \end{aligned}$$

- La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$g'(x) = -e^x + (1 - x)\ e^x = -x\ e^x \leqslant 0 \quad \textit{(car } x \geqslant 0\textit{)}$$

- On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	0	$-$	
Variations de g	2	$\searrow$	$-\infty$

En effet :

× $\lim\limits_{x \to 0} (1-x)\ \mathrm{e}^x + 1 = 0 = g(0) = \mathrm{e}^0 + 1 = 2$

× comme $1 - x \underset{x \to +\infty}{\sim} -x$ alors $(1-x)\ \mathrm{e}^x \underset{x \to +\infty}{\sim} -x\ \mathrm{e}^x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Et ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

- La fonction g est :

× continue sur $[0, +\infty[$,

× strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $g([0, +\infty[)$. Or :

$$g([0, +\infty[) = \left] \lim_{x \to +\infty} g(x), g(0) \right] =]-\infty, 2]$$

Comme $0 \in]-\infty, 2]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f'(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \in \mathbb{R}_+.}$$

□

c) Prouver que : $f(\alpha) = \alpha - 1$.

Démonstration.
On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned}
& f(\alpha) = \alpha - 1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\alpha}{\mathrm{e}^\alpha + 1} = \alpha - 1 \\
\Leftrightarrow\ & \alpha = (\alpha - 1)\ (\mathrm{e}^\alpha + 1) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha = (\alpha - 1)\ \mathrm{e}^\alpha + (\alpha - 1) \\
\Leftrightarrow\ & 0 = (\alpha - 1)\ \mathrm{e}^\alpha - 1 \\
\Leftrightarrow\ & 0 = -g(\alpha) \\
\Leftrightarrow\ & g(\alpha) = 0
\end{aligned}$$

La dernière égalité étant vérifiée, il en est de même de la première.

$$\boxed{f(\alpha) = \alpha - 1}$$

□

d) Dresser le tableau de variation de f et donner l'allure du graphe de cette fonction.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

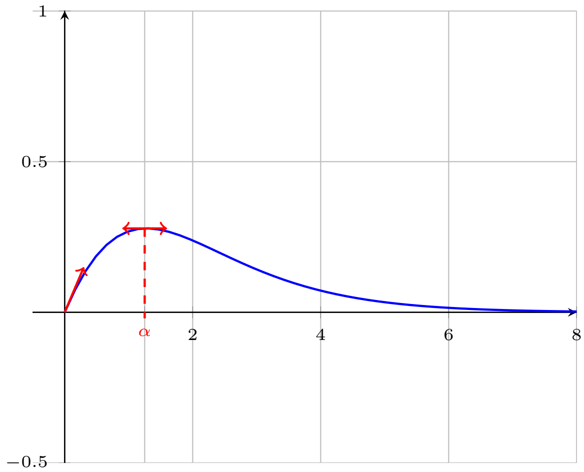
- Comme $(e^x + 1)^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $(1 - x)\ e^x + 1 = g(x)$.
  On peut alors déduire du tableau de variations de g celui de f :

x	0		α		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	0	$-$		$-$	
Variations de g	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
Signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$\alpha - 1$	$\searrow$	0

  En effet :
  $\times$ $f(x) = \dfrac{x}{e^x + 1} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{x}{e^x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

- D'autre part, la courbe de f :
  $\times$ admet une tangente horizontale en α.
  $\times$ admet pour tangente la droite d'équation $y = f(0) + f'(0)\ (x - 0) = \dfrac{1}{2}\ x$.

- On en déduit l'allure suivante pour le graphe de f.



$\square$

2. *Approximation de α*

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$\varphi(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$$

a) Prouver que α est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} \varphi(x) = x \ \Leftrightarrow \ x = 1 + \mathrm{e}^{-x} \ & \Leftrightarrow \ (1-x) + \mathrm{e}^{-x} = 0 \\ & \Leftrightarrow \ ((1-x)\ \mathrm{e}^{x} + 1)\ \mathrm{e}^{-x} = 0 \\ & \Leftrightarrow \ (1-x)\ \mathrm{e}^{x} + 1 = 0 \qquad \textit{(car } e^{-x} > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow \ g(x) = 0 \end{aligned}$$

Or, par définition, α est l'unique solution, dans $\mathbb{R}_+$, de l'équation $g(x) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \alpha \text{ est l'unique solution de l'équation } \varphi(x) = x.}$$

□

b) Montrer que $\alpha > 1$. En déduire que :

$$\alpha - 1 < \mathrm{e}^{-1}$$

Démonstration.

- Tout d'abord :
  - $\times$ $g(\alpha) = 0$.
  - $\times$ $g(1) = (1-1)\ \mathrm{e}^1 + 1 = 1$.

  Ainsi : $g(\alpha) < g(1)$.
- Or, d'après le théorème de la bijection, la fonction $g^{-1} : [0, +\infty[\ \to \ ]-\infty, 2]$ est strictement décroissante. En appliquant g^{-1} de part et d'autre de l'égalité, on obtient :

$$\boxed{\alpha > 1}$$

- La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
  Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors : $\varphi'(x) = -\mathrm{e}^{-x} < 0$.
  Ainsi, la fonction φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
  En appliquant φ de part et d'autre de l'inégalité précédente, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \varphi(\alpha) & < & \varphi(1) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \alpha & & 1 + \mathrm{e}^{-1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \alpha - 1 < \mathrm{e}^{-1}.}$$

Commentaire

On pouvait rédiger autrement. Détaillons cette solution.

D'après la question précédente : $\varphi(\alpha) = \alpha$. Ainsi : $\alpha = 1 + \mathrm{e}^{-\alpha}$. Et donc :

$$\alpha - 1 = \mathrm{e}^{-\alpha} < \mathrm{e}^{-1}$$

En effet, comme $\alpha > 1$, alors $-\alpha < -1$ et $\mathrm{e}^{-\alpha} < \mathrm{e}^{-1}$ par stricte croissance de la fonction exp.
D'où le résultat.

□

c) Établir que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1 :

$$\varphi(x) \geqslant 1$$

et que

$$|\varphi(x) - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-1} |x - \alpha|$$

Démonstration.
Soit $x \geqslant 1$.

- Tout d'abord :
$$\varphi(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x} > 1 \quad \text{car} \quad \mathrm{e}^{-x} > 0$$
$$\boxed{\forall x \geqslant 1, \ \varphi(x) \geqslant 1}$$

- D'autre part :
$$|\varphi'(x)| = | - \mathrm{e}^{-x}| = \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$$
En effet, comme $x \geqslant 1$, on a $-x \leqslant -1$ et $\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$ par application de la fonction exp strictement croissante.

- D'après ce qui précède :
  × φ est dérivable sur $[1, +\infty[$,
  × $\forall x \in [1, +\infty[$, $|\varphi'(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-1}$.

  On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis que :
$$\forall (u, v) \in [1, +\infty[^2, \ |\varphi(v) - \varphi(u)| \ \leqslant \ \mathrm{e}^{-1} \ |v - u|$$
En appliquant cette inégalité à $v = x \in [1, +\infty[$ et $u = \alpha \in [1, +\infty[$ (d'après la question ***2.b)***), on obtient :
$$|\varphi(x) - \varphi(\alpha)| \ \leqslant \ \mathrm{e}^{-1} \ |x - \alpha|$$
Enfin, d'après la question ***2.a)***, $\varphi(\alpha) = \alpha$.
$$\boxed{\forall x \geqslant 1, \ \ |\varphi(x) - \alpha| \ \leqslant \ \mathrm{e}^{-1} \ |x - \alpha|}$$

□

d) Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $[1; +\infty[$ définie par la condition initiale $\alpha_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\alpha_{n+1} = \varphi(\alpha_n)$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|\alpha_n - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-(n+1)}$$

Démonstration.

- Par une récurrence immédiate, on peut démontrer la propriété affirmée par l'énoncé :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \alpha_n \geqslant 1$$
En effet :
  × $\alpha_0 = 1 \geqslant 1$.
  × si $\alpha_n \geqslant 1$ alors, par la question ***2.c)***, $\alpha_{n+1} = \varphi(\alpha_n) \geqslant 1$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant l'inégalité précédente à $x = \alpha_n \in [1, +\infty[$, on obtient que :
$$| \underbrace{\varphi(\alpha_n)}_{= \alpha_{n+1}} - \alpha \ | \ \leqslant \ \mathrm{e}^{-1} \ |\alpha_n - \alpha|$$

- Démontrons alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $|\alpha_n - \alpha| \leqslant e^{-(n+1)}$.
  - ▸ **Initialisation** :
    Remarquons que : $|\alpha_0 - \alpha| = |1 - \alpha| = \alpha - 1$ car $\alpha \geqslant 1$ d'après la question ***2.b)***.
    De plus, toujours d'après la question ***2.b)*** : $\alpha - 1 < e^{-1}$. On en déduit :
    $$|\alpha_0 - \alpha| \leqslant e^{-1}$$
    ce qui démontre $\mathcal{P}(0)$.
  - ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $|\alpha_{n+1} - \alpha| \leqslant e^{-(n+2)}$).
    On remarque alors :
    $$\begin{array}{rcll} |\varphi(\alpha_n) - \alpha| & \leqslant & e^{-1}\ |\alpha_n - \alpha| & \textit{(d'après le point évoqué ci-dessus)} \\ & \leqslant & e^{-1}\ e^{-(n+1)} & \textit{(par hypothèse de récurrence } \mathcal{P}(n)\textit{)} \\ & = & e^{-1-(n+1)} \ = \ e^{-(n+2)} & \end{array}$$
    On en conclut que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ |\alpha_n - \alpha| \leqslant e^{-(n+1)}.}$$

□

e) En déterminant au préalable le nombre d'itérations nécessaires, écrire en **Scilab** un programme permettant de trouver et d'**afficher** une valeur décimale approchée $\tilde{\alpha}$ de α telle que :
$$|\tilde{\alpha} - \alpha| \leqslant 10^{-6}$$

Démonstration.

- Afin de calculer une valeur approchée de α à 10^{-6} près, il suffit de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que :
  $$e^{-(N+1)} \leqslant 10^{-6}$$
- En effet, d'après la question précédente, on aura alors :
  $$|\alpha_N - \alpha| \leqslant e^{-(N+1)} \leqslant 10^{-6}$$
  et ainsi $\tilde{\alpha} = \alpha_N$ convient.
- On remarque alors que :
  $$\begin{array}{rcll} e^{-(n+1)} \leqslant 10^{-6} & \Leftrightarrow & -(n+1) \leqslant \ln(10^{-6}) & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & -(n+1) \leqslant -6\ \ln(10) & \\ & \Leftrightarrow & n+1 \geqslant 6\ \ln(10) & \\ & \Leftrightarrow & n \geqslant 6\ \ln(10) - 1 & \end{array}$$
  En choisissant $N = \lceil 6\ \ln(10) - 1 \rceil$ (ou tout entier supérieur), on obtient bien que α_N est une approximation de α à 10^{-6} près.

- Le programme **Scilab** suivant stocke les valeurs successives de α_n dans une variable `a`. Après N itérations, on obtient la valeur attendue α_N qui est alors affichée.

```
N = ceil(6 * log(10) - 1)
a = 1
for i = 1:N
    a = 1 + exp(-a)
end
disp(a)
```

□

Exercice 3 (EML 2010)

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de classe C^2, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x^2)$$

et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
On donne la valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.

Partie I : Étude de f et tracé de $\mathcal{C}$

1. a) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto \ln(1 + x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car est la composée $h \circ g$ des fonctions :
  - × $g : x \mapsto 1 + x^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et telle que $g(\mathbb{R}) \subset]0, +\infty[$.
    (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \geqslant 1 > 0$)
  - × $h : x \mapsto \ln(x)$, dérivable sur $]0, +\infty[$.
- On en déduit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}\ 2x = \frac{(1+x^2) - 2x}{1+x^2} = \frac{1 - 2x + x^2}{1+x^2} = \frac{(1-x)^2}{1+x^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{(1-x)^2}{1+x^2}}$$

□

b) En déduire le sens de variation de f.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Comme $1 + x^2 > 0$, la quantité $f'(x) = \dfrac{(1-x)^2}{1+x^2}$ est du signe de $(1-x)^2$.
  On en déduit le tableau de variations suivant pour f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les différents éléments de ce tableau.
  - Déterminons tout d'abord $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Si $x > 0$:
$$\ln(1+x^2) = \ln\left(x^2 \, \left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right) = \ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) = 2\,\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$
On a alors :
$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x - \ln(1+x^2) \\ & = & x - 2\,\ln(x) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \\ & = & x\left(1 - 2\,\dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right) \end{array}$$
Or : $\dfrac{\ln(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.
Et : $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$ et $x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit que : $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$
  - Déterminons maintenant $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Remarquons que :
    × $x \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$
    × comme $1+x^2 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\ln(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors, par théorème de composition des limites : $-\ln(1+x^2) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.}$$

Commentaire

- On utilise dans cette démonstration l'égalité : $\ln(x^2) = 2\ln(x)$. Insistons sur le fait que cette égalité n'est vérifiée que lorsqu'on peut l'écrire. Autrement dit, cette égalité est vérifiée seulement lorsque $x > 0$ (la quantité $\ln(x)$ est alors bien définie).
- Dans le cas où $x < 0$ on peut écrire :
$$\ln(x^2) = \ln((-x)(-x)) = \ln(-x) + \ln(-x) = 2\ln(-x)$$

□

c) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.

Démonstration.
Par le même raisonnement qu'en ***1.a)***, on démontre que la fonction f est deux fois dérivable (et même C^∞) sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{array}{rcl} f''(x) & = & \dfrac{2\,(1-x)(-1)(1+x^2) - (1-x)^2\,2x}{(1+x^2)^2} \\ & = & -2\,(1-x)\,\dfrac{(1+x^2)+x\,(1-x)}{1+x^2} \\ & = & -2\,(1-x)\,\dfrac{1+\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{(1+x^2)^2} \quad = \quad -2\,(1-x)\,\dfrac{1+x}{(1+x^2)^2} \end{array}$$
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = 2\,(x-1)\,\dfrac{1+x}{(1+x^2)^2}}$$
□

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

Démonstration.
Cette question a été résolue en ***1.b)***.

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

Commentaire

- En question ***1.b)***, il est demandé de donner les variations de f. Formellement, on ne demande donc pas le tableau de variations. On l'a fait car c'est le bon outil pour représenter graphiquement les choses. Dans ce cas, on doit exposer les calculs de limite en ***1.b)***.
- Il faut veiller à éviter de renvoyer le correcteur à une autre page / question pour la résolution d'une question. Il faut au contraire toujours faciliter la lecture pour le correcteur. En commençant par respecter scrupuleusement la numérotation des questions.
- L'ordre des questions de l'énoncé n'était peut-être pas heureux mais en lisant l'énoncé jusqu'au bout, on évite de répondre aux questions au mauvais endroit. On s'efforcera de respecter au maximum l'esprit de l'énoncé.

□

3. Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $(1+x^2)^2 > 0$, $f''(x)$ est du signe de $(x-1)(1+x)$.
C'est un polynôme de degré 2 dont le cœfficient du terme de plus haut degré est positif.
On en déduit que :

- $\forall x \in \,]-1,1[$, $f''(x) < 0$
  ($f''(x) < 0$ dans l'intervalle défini par les racines du polynôme)
- $\forall x \in \,]-\infty,-1[\, \cup \,]1,+\infty[$, $f''(x) > 0$

Ainsi, f'' s'annule en changeant de signe en -1 et en 1.

$$\boxed{\text{La courbe représentative de } f \text{ admet deux points d'inflexion : } (-1,-1-\ln(2)) \text{ et } (1, 1-\ln(2)).}$$

Remarque
On pouvait aussi dresser le tableau de signe de $f''(x)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

□

4. Tracer $\mathcal{C}$. On utilisera un repère orthonormé d'unité graphique 2 centimètres, et on précisera la tangente à $\mathcal{C}$ en l'origine et en chacun des points d'inflexion.

Démonstration.

- Déterminons l'équation des tangentes demandées.
  - Au point $(0, f(0))$, la courbe $\mathcal{C}$ admet pour tangente la droite d'équation :

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = x$$

  - Au point $(-1, f(-1))$, la courbe $\mathcal{C}$ admet pour tangente la droite d'équation :

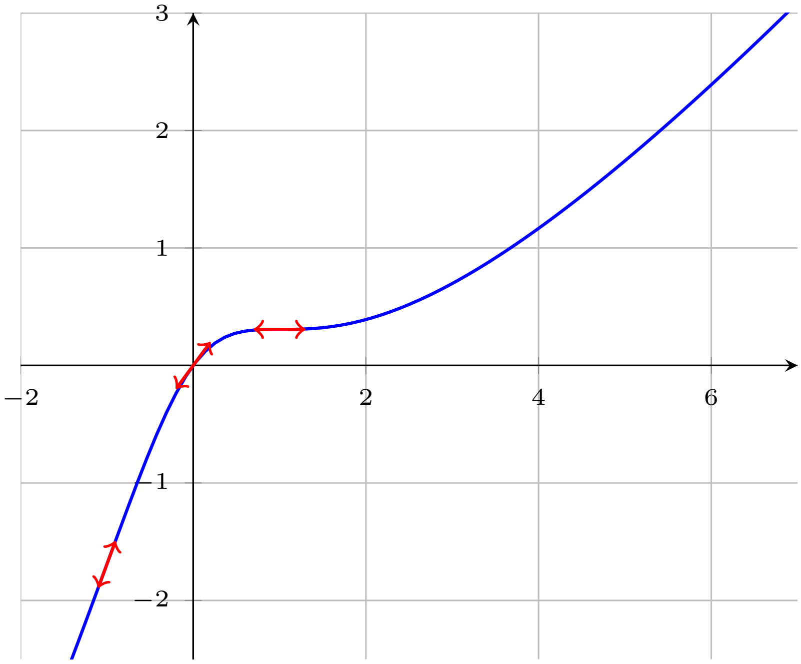
$$y = f(-1) + f'(-1)(x - (-1)) = (-1 - \ln(2)) + 2\ (x + 1) = 2x + (1 - \ln(2))$$

  - Au point $(1, f(1))$, la courbe $\mathcal{C}$ admet pour tangente la droite d'équation :

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1) = 1 - \ln(2)$$

    (comme $f'(1) = 0$, on obtient une tangente horizontale)

- En regroupant toutes les informations précédentes on obtient le graphe suivant.



□

5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\ dx$.
A cet effet, on pourra utiliser le changement de variable défini par $t = 1 + x^2$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto x f(x)$ est continue sur $[0, 1]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x f(x) dx$ est donc bien définie.
  Par linéarité de l'intégration, on a :

$$\int_0^1 x f(x)\ dx \ = \ \int_0^1 x\ \left(x - \ln(1 + x^2)\right)\ dx \ = \ \int_0^1 x^2\ dx - \int_0^1 x\ \ln(1 + x^2)\ dx$$

- Tout d'abord :

$$\int_0^1 x^2 \ dx \ = \ \left[\ \frac{x^3}{3} \ \right]_0^1 \ = \ \frac{1}{3} \ \left[\ x^3 \ \right]_0^1 \ = \ \frac{1}{3} \ (1^3 - 0^3) \ = \ \frac{1}{3}$$

- La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est C^1 sur $[0, 1]$.
  On peut donc effectuer le changement de variable $\boxed{t = 1 + x^2}$.

  $t = 1 + x^2$
  (et donc $x^2 = t - 1$, et $x = \sqrt{t-1}$ car $\sqrt{x^2} = |x| = x$ puisque $x \in [0, 1]$)
  $\hookrightarrow dt = 2x \ \ dx$ et $dx = \dfrac{1}{2x} \ dt = \dfrac{1}{2\sqrt{t-1}} \ dt$
  - $x = 0 \ \Rightarrow \ t = 1 + 0^2 = 1$
  - $x = 1 \ \Rightarrow \ t = 1 + 1^2 = 2$

  (ainsi $t \in [1, 2]$ et donc $t - 1 \in [0, 1]$ ce qui permet de justifier l'écriture $\sqrt{t-1}$)

  On a donc :

$$\int_0^1 x \ \ln(1 + x^2) \ dx \ = \ \int_1^2 \cancel{\sqrt{t-1}} \ \ln(t) \ \frac{1}{2\cancel{\sqrt{t-1}}} \ dt \ = \ \frac{1}{2} \int_1^2 \ln(t) \ dt$$

  On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & \ln(t) & & u'(t) & = & \dfrac{1}{t} \\[2ex] v'(t) & = & 1 & & v(t) & = & t \end{array} \right.$$

  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont C^1 sur $[1, 2]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln(t) \ dt &= \left[\ t \ \ln(t) \ \right]_1^2 - \int_1^2 \cancel{t} \ \frac{1}{\cancel{t}} \ dt \\ &= (2 \ \ln(2) - 1 \ \cancel{\ln(1)}) - 1 \\ &= 2 \ \ln(2) - 1 \end{aligned}$$

- Il reste à combiner tous ces résultats :

$$\int_0^1 x \ f(x) \ dx \ = \ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \ (2 \ \ln(2) - 1) \ = \ \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \ln(2) \ = \ \frac{5}{6} - \ln(2)$$

$$\boxed{\int_0^1 x f(x) \ dx = \frac{5}{6} - \ln(2)}$$

□

Commentaire

- On démontre, dans cette question, un résultat classique : la fonction $x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction ln.
- Ce résultat n'est pas officiellement au programme mais son utilisation directe ne serait certainement pas sanctionnée. Pour autant, il est important de savoir le démontrer rapidement : cela pourrait être explicitement demandé.

Partie II : Étude d'une suite et d'une série associées à f

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Remarquons tout d'abord que :

$$f(x) - x = -\ln(1+x^2) \leqslant 0$$

En effet, $1 + x^2 \geqslant 1$ et donc, par croissance de la fonction ln, $\ln(1+x^2) \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant x.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On appplique l'inégalité précédente à $x = u_n \in \mathbb{R}$. On obtient :

$$u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_n$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est bien décroissante.}}$$

□

2. Établir que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

Démonstration.

- La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit que :

$$f([0, +\infty[) \ = \ [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)[\ = \ [0, +\infty[$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant 0}$$

- Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \geqslant 0$.
  - ▶ **Initialisation** :
    Par définition : $u_0 = 1 \geqslant 0$.
    On en déduit $\mathcal{P}(0)$.
  - ▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \geqslant 0$).
    Par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant 0$.
    En appliquant l'inégalité au-dessus à $x = u_n \geqslant 0$, on obtient :

$$u_{n+1} = f(u_n) \geqslant 0$$

    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

  Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$.

- La suite (u_n) est :
  × décroissante,
  × minorée par 0.

  Elle est donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.

- La fonction f étant continue en ℓ, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ {\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow & & {\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow \\ \ell & = & f(\ell) \end{array}$$

Ainsi, ℓ est un point fixe de f.

- Déterminons alors l'ensemble des points fixes de f.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) = x & \Leftrightarrow & \cancel{x} - \ln\left(1+x^2\right) = \cancel{x} \\ & \Leftrightarrow & \ln\left(1+x^2\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \exp\left(\ln\left(1+x^2\right)\right) = \exp(0) \\ & \Leftrightarrow & \cancel{1} + x^2 = \cancel{1} \\ & \Leftrightarrow & x^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow & x = 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ converge vers } 0, \text{ seul point fixe de } f.}$$

$\square$

3. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche un entier n tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$.

Démonstration.

```
n = 0
u = 1
while u > 10 ^ (-3)
    n = n + 1
    u = u - log(1 + u ^ 2)
end
disp(n)
```

Commentaire

- D'après la question précédente, on sait que la suite (u_n) converge vers 0. On en déduit qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \ |u_n - 0| \leqslant 10^{-3}$$

Toujours d'après la question précédente : $|u_n - 0| = |u_n| = u_n$ car $u_n \geqslant 0$.

- Ainsi, on est assuré de la terminaison de la boucle `while`. Le programme consiste en fait à rechercher le premier rang n_0 tel que l'inégalité $u_n \leqslant 10^{-3}$ est vérifiée. $\square$

4. ***a)*** Établir : $\forall x \in [0;1], \ f(x) \leqslant x - \dfrac{1}{2}x^2$.

Démonstration.
Soit $x \in [0,1]$.

- Raisonnons par équivalence :

$$f(x) \leqslant x - \frac{1}{2}\,x^2 \ \Leftrightarrow\ \cancel{x} - \ln(1+x^2) \leqslant \cancel{x} - \frac{1}{2}\,x^2 \ \Leftrightarrow\ 2\,\ln(1+x^2) \geqslant x^2 \ \Leftrightarrow\ 2\,\ln(1+x^2) - x^2 \geqslant 0$$

- On considère alors la fonction $g : x \mapsto 2\ \ln(1+x^2) - x^2$.
Cette fonction est dérivable sur $[0,1]$ (même sur $\mathbb{R}$) car $x \mapsto \ln(1+x^2)$ l'est.

$$g'(x) \ = \ 2\ \frac{1}{1+x^2}\ 2x - 2x \ = \ 2x\ \frac{2}{1+x^2} - 1 \ = \ 2x\ \frac{2-(1+x^2)}{1+x^2} \ = \ 2x\ \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

- Tout d'abord : $1 + x^2 \geqslant 1 > 0$.
Comme $x \in [0,1]$, $2x \geqslant 0$ et ainsi la quantité $g'(x)$ est du signe de $(1-x^2) = (1-x)(1+x)$ et est nulle si $x = 0$. On reconnaît l'expression d'un polynôme du second degré de racines évidentes -1 et 1 et dont le cœfficient du terme de plus haut degré est négatif. Ainsi :

$$\forall x \in [-1,1],\ g'(x) \geqslant 0$$

- La fonction g est donc croissante sur $[0,1]$. On en déduit que :

$$\forall x \in [0,1],\ g(x) \geqslant g(0) = 2\ \ln(1+0^2) - 0^2 = 0$$

Cette inégalité étant équivalente à celle qu'on souhaite montrer, on a bien :
$$\forall x \in [0,1],\ f(x) \leqslant x - \frac{1}{2}\ x^2$$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 \ \leqslant \ 2\ (u_n - u_{n+1})$.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente :

$$f(x) \leqslant x - \frac{1}{2}\ x^2$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{2}\ x^2 \leqslant x - f(x)$$

$$\text{ainsi} \quad x^2 \leqslant 2\ (x - f(x))$$

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ x^2 \leqslant 2\ (x - f(x))}$$

- On a démontré en question ***2.*** que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.
On sait de plus, d'après la question ***1.***, que la suite (u_n) est décroissante. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_0 = 1$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant l'inégalité précédente à $x = u_n \in [0,1]$, on obtient :

$$u_n^2 \leqslant 2\ (u_n - f(u_n))$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \leqslant 2\ (u_n - u_{n+1})$.

□

c) Démontrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n^2$ converge.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord que la série $\sum (u_n - u_{n+1})$ est convergente.
  Pour ce faire, on étudie la suite de ses sommes partielles (S_n) :

$$S_n \; = \; \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) \; = \; u_0 - u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} u_0 - 0 = 1$$

$$\boxed{\text{La série } \sum (u_n - u_{n+1}) \text{ est convergente (de somme 1).}}$$

- – D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; 0 \leqslant u_n^2 \leqslant 2 \; (u_n - u_{n+1})$$

  – Or la série $\sum (u_n - u_{n+1})$ est convergente (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel).

  – On en déduit, par le critère de comparaison des séries à termes positifs que la série $\sum u_n^2$ est elle aussi convergente.

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n^2 \text{ est convergente.}}$$

□

Exercice 4

On définit la fonction :

$$\begin{array}{rccc} f & : & [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{array}$$

1. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 2$ on a :

$$\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

Démonstration.
Soit $x \geqslant 2$.

- Traitons l'inégalité de gauche.

Tout d'abord	$x^2 \geqslant x^2 - 1 \geqslant 3$	*(l'inégalité de droite est vérifiée car $x \geqslant 2$)*
donc	$\sqrt{x^2} \geqslant \sqrt{x^2-1} \geqslant \sqrt{3}$	*(car la fonction racine est croissante)*
ainsi	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	*(par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$)*

$$\boxed{\text{Comme } x \geqslant 2, \; \sqrt{x^2} = x \text{ et ainsi : } \frac{1}{x} \leqslant f(x).}$$

- Pour la deuxième inégalité, raisonnons par équivalence.

$$\begin{array}{cll} & f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & \\ \Leftrightarrow & \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x^2-1} \geqslant \sqrt{x-1} & \textit{(par stricte croissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ \Leftrightarrow & x^2 - \cancel{1} \geqslant x - \cancel{1} & \textit{(par stricte croissance de la fonction élévation au carré sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ \Leftrightarrow & x^2 - x \geqslant 0 & \end{array}$$

Or : $x^2 - x = x\ (x-1)$.
On reconnaît une fonction polynomiale de degré 2 de racines 0 et -1 et dont le cœfficient du terme dominant est positif. On en déduit que :

$$\begin{cases} x\ (x-1) \leqslant 0 & \text{si } x \in [0,1] \\ x\ (x-1) > 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{La dernière inégalité étant vérifée, la première l'est aussi. Ainsi : } f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}}$$

□

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit l'intégrale :

$$I_n = \int_2^n f(x)\ dx$$

a. En utilisant l'inégalité de la première question, démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Soit $x \geqslant 2$. D'après la question précédente :

$$f(x) \ \geqslant \ \frac{1}{x}$$

- Ainsi, par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($2 \leqslant n$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_2^n f(x)\ dx & \geqslant & \displaystyle\int_2^n \frac{1}{x}\ dx & & \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \\ I_n & & [\ \ln(|x|)\ ]_2^n & = & \ln(n) - \ln(2) \end{array}$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) - \ln(2) = +\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème de comparaison, } \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty.}$$

□

b. On définit la fonction F suivante :

$$F \;:\; \begin{array}{ccc} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x+\sqrt{x^2-1}) \end{array}$$

Calculer la dérivée de F, en déduire une expression de I_n en fonction de n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Remarquons tout d'abord que la fonction $u : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ est dérivable sur $[2,+\infty[$ car est la composée $v_2 \circ v_1$ des fonctions :
  × $v_1 : x \mapsto x^2 - 1$ dérivable sur $[2,+\infty[$ car polynomiale,
  et telle que $v_A(\,[2,+\infty[\,) \subset \,]0,+\infty[$ (pour tout $x \geqslant 2$, $x^2-1 \geqslant 3 > 0$).
  × $v_2 : x \mapsto \sqrt{x}$, dérivable sur $]0,+\infty[$.
- Soit $x \geqslant 2$.

$$u'(x) \;=\; \frac{1}{\cancel{2}\,\sqrt{x^2-1}}\,\cancel{2}x \;=\; \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

- La fonction F est dérivable sur $[2,+\infty[$ car est la composée $H \circ G$ des fonctions :
  × $G : x \mapsto x + \sqrt{x^2-1}$ dérivable sur $[2,+\infty[$ d'après ce qui précède,
  et telle que $G(\,[2,+\infty[\,) \subset \,]0,+\infty[$ (pour tout $x \geqslant 2$, $x+\sqrt{x^2-1} \geqslant x \geqslant 2 > 0$).
  × $H : x \mapsto \ln(x)$, dérivable sur $]0,+\infty[$.
- Soit $x \geqslant 2$.

$$F'(x) \;=\; \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) \;=\; \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \;=\; f(x)$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 2,\; F'(x) = f(x)}$$

- On en déduit que F est une primitive de f. Ainsi :

$$I_n \;=\; \int_2^n f(x)\,dx \;=\; [\;F(x)\;]_2^n \;=\; F(n) - F(2) \;=\; \ln(n+\sqrt{n^2-1}) - \ln(2+\sqrt{3})$$

$$\boxed{I_n \;=\; \ln(n+\sqrt{n^2-1}) - \ln(2+\sqrt{3})}$$

□

c. Déterminer la limite de $I_n - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} I_n - \ln(n) \;&=\; \ln(n+\sqrt{n^2-1}) - \ln(n) - \ln(2+\sqrt{3}) \\ &=\; \ln\left(\frac{n+\sqrt{n^2-1}}{n}\right) - \ln(2+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{n+\sqrt{n^2-1}}{n} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\ \frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$$

Ainsi, par composition des limites, la fonction ln étant continue en 2 :

$$\ln\left(\frac{n+\sqrt{n^2-1}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n - \ln n \ = \ \ln(2) - \ln(2+\sqrt{3}) \ = \ \ln\left(\frac{2}{2+\sqrt{3}}\right)}$$

□

3. On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$$

a. Pour tout k entier supérieur ou égal à trois, montrer qu'on a :

$$\int_k^{k+1} f(x)\ dx \leqslant \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\ dx$$

Démonstration.
Soit $k \geqslant 3$.

- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ est dérivable sur $[2,+\infty[$ comme inverse de la fonction u, dérivable sur $[2,+\infty[$ et qui `NE S'ANNULE PAS` sur $[2,+\infty[$.
Soit $x \geqslant 2$.

$$f'(x) \ = \ -\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{(\sqrt{x^2-1})^2} \ = \ -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}\ (\sqrt{x^2-1})^2} \leqslant 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } f \text{ est décroissante sur } [2,+\infty[.}$$

- Soit $x \in [k-1,k]$.

Tout d'abord	$k-1$	$\leqslant$	x	$\leqslant$	k	
donc	$f(k-1)$	$\geqslant$	$f(x)$	$\geqslant$	$f(k)$	*(car $k-1 \geqslant 2$ et que f est décroissante sur $[2,+\infty[$)*
et	$\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(k-1)\ dx$	$\geqslant$	$\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\ dx$	$\geqslant$	$\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(k)\ dx$	*(par croissance de l'intégration les bornes étant dans l'ordre croissant $(k-1 \leqslant k)$)*
	$\shortparallel$				$\shortparallel$	
	$f(k-1)$				$f(k)$	

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, pour tout } k \geqslant 3 :\ f(k-1) \geqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\ dx \geqslant f(k) \text{ et en particulier :}\\ f(k) = \dfrac{1}{\sqrt{k^2-1}} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\ dx.\end{array}}$$

- On procède de même sur $[k, k+1]$.

$$\boxed{\text{On démontre alors que pour tout } k \geqslant 3 : \ f(k) \geqslant \int_k^{k+1} f(x)\ dx \geqslant f(k+1) \text{ et en particulier : } \int_k^{k+1} f(x)\ dx \leqslant f(k) = \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}.}$$

Commentaire

Pour le calcul de dérivée de la fonction f, on pouvait remarquer que : $\forall x \geqslant 2,\ f(x) = (x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$.
Ainsi :

$$f'(x) \ = \ -\frac{1}{\cancel{2}}\,(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\ \cancel{2}\ x \ = \ -x\ (x^2-1)^{-\frac{3}{2}} \ = \ -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}\ (x^2-1)}$$

□

b. En déduire que : $\forall n \geqslant 3,\ I_{n+1} \leqslant S_n \leqslant I_n + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$.

- En sommant les inégalités précédentes, vérifiées pour tout $k \geqslant 3$, on obtient :

$$\sum_{k=3}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\ dx \quad \leqslant \quad \sum_{k=3}^{n} f(k) \quad \leqslant \quad \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\ dx$$

donc

$$\int_3^{n+1} f(x)\ dx \quad \leqslant \quad \sum_{k=2}^{n} f(k) - f(2) \quad \leqslant \quad \int_2^{n} f(x)\ dx$$

(par la relation de Chasles)

et

$$\int_2^{n+1} f(x)\ dx - \int_2^{3} f(x)\ dx \quad \leqslant \quad S_n - f(2) \quad \leqslant \quad \int_2^{n} f(x)\ dx$$

- Et comme $\displaystyle\int_2^{n+1} f(x)\ dx = I_{n+1}$, on obtient :

$$\left(f(2) - \int_2^3 f(x)\ dx\right) + I_{n+1} \ \leqslant \ S_n \ \leqslant \ I_n + f(2)$$

- Puis, comme f est décroissante sur $[2, +\infty[$: $f(x) \leqslant f(2)$.
Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($2 \leqslant 3$), on obtient :

$$\int_2^3 f(x)\ dx \ \leqslant \ \int_2^3 f(2)\ dx = f(2)$$

et donc $f(2) - \displaystyle\int_2^3 f(x)\ dx \ \geqslant \ 0$.

- On calcule enfin : $f(2) = \dfrac{1}{\sqrt{4-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 3,\ I_{n+1} \ \leqslant \ S_n \ \leqslant \ I_n + \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

□

c. Démontrer que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$.

- Comme $\ln(n) > 0$, on déduit de la question précédente que :

$$\frac{I_{n+1}}{\ln(n)} \leqslant \frac{S_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{I_n}{\ln(n)} + \frac{1}{\sqrt{3}\ \ln(n)}$$

Or :

$$I_n = \ln(n+\sqrt{n^2-1}) = \ln\left(n\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{I_n}{\ln(n)} &= \frac{\ln(n)+\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)}{\ln(n)}\\ &= 1+\frac{\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1\end{aligned}$$

En effet, $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et par théorème de composition, la fonction ln étant continue en 2 : $\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1+\sqrt{1}) = \ln(2)$.

- De même :

$$\begin{aligned}\frac{I_{n+1}}{\ln(n)} &= \frac{\ln(n+1)+\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{(n+1)^2}}\right)}{\ln(n)}\\ &= \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}+\frac{\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{(n+1)^2}}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1\end{aligned}$$

En effet, $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car :

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\ \frac{1+\frac{1}{n}}{1}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$$

- En conclusion :

$$\begin{array}{ccccc}\dfrac{I_{n+1}}{\ln(n)} & \leqslant & \dfrac{S_n}{\ln(n)} & \leqslant & \dfrac{I_n}{\ln(n)} + \dfrac{1}{\sqrt{3}\ln(n)}\\ {\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow & & & & {\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow\\ 1 & & & & 1\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, par le théorème d'encadrement : } \frac{S_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1\text{, ce qui démontre que : } S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

□

4. On se donne un réel α et on définit, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k^2-1)^\alpha}$$

a. Dans cette question, $\alpha = 1$. Trouver deux réels a et b tels que :

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}$$

En déduire une expression de T_n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Cherchons a et b tels que spécifiés. Tout d'abord :

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{a\ (k+1) + b\ (k-1)}{k^2-1} = \frac{(a+b)\ k + (a-b)}{k^2-1}$$

En identifiant les polynômes de chaque numérateur, on obtient le système : $\left\{\begin{array}{l} a+b=0 \\ a-b=1 \end{array}\right.$. Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a & + & b & = & 0 \\ a & - & b & = & 1 \end{array}\right. \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcl} a & + & b & = & 0 \\ & & 2b & = & 1 \end{array}\right. \overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcl} 2a & & & = & -1 \\ & & 2b & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Les réels } a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \text{ conviennent.}}$$

- On considère maintenant $\alpha = 1$. On a :

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{\frac{1}{2}}{k-1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{-\frac{1}{2}}{k+1} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{k+1} \right) + 1 + \frac{1}{2} - \left(\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{T_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4}}$$

$\square$

b. Pour quelles valeurs de α la suite (T_n) est-elle convergente ?

Démonstration.
Procédons par disjonction de cas.

- Si $\alpha < 0$ alors :
$$\frac{1}{(n^2-1)^\alpha} = (n^2-1)^{-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
La série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n^2-1)^\alpha}$ est donc (grossièrement) divergente.
$$\boxed{\text{La suite } (T_n) \text{ diverge si } \alpha < 0.}$$
- Si $\alpha \geqslant 0$ alors :
$$\frac{1}{(n^2-1)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2\alpha}} \ (\geqslant 0)$$
En effet : $\dfrac{\frac{1}{(n^2-1)^\alpha}}{\frac{1}{n^{2\alpha}}} = \dfrac{n^{2\alpha}}{(n^2-1)^\alpha} = \dfrac{n^{2\alpha}}{n^{2\alpha}} \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$
Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ est convergente si et seulement si $2\alpha > 1$ *i.e.* $\alpha > \frac{1}{2}$ en tant que série de Riemann d'exposant 2α.
On en déduit, par le théorème d'équivalence des séries à termes positifs que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n^2-1)^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{En conclusion, la série } \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n^2-1)^\alpha} \text{ est convergente si et seulement si } \alpha > \frac{1}{2}.}$$

□