DS1 (version B) /161

I. Exercice 1 /30

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 6A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.

- **1 pt : calcul**
- **1 pt : polynôme annulateur**

2. ***a)*** En déduire la seule valeur propre de A (donc aussi de f).

- **1 pt :** $\text{Sp}(A) \subset \{3\}$
- **2 pts :** $\{3\} \subset \text{Sp}(A)$

b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

- **2 pts : diagonalisable**
- **1 pt : inversible**

3. Déterminer une base (u_1, u_2) du sous-espace propre de f associé à la valeur propre de f.

- **2 pts : résolution système**
- **1 pt : écriture sous forme de Vect**
- **1 pt : famille génératrice**
- **1 pt : famille libre**
- **-1 pt : confusion $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$**

4. ***a)*** On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

- **2 pts : famille libre**
- **1 pt : cardinal**

b) Vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 3.

- **2 pts (1 pour u_1, u_2 et 1 pour u_3)**
- **-1 pt : confusion $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$**

c) En écrivant $T = 3I + N$, déterminer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n comme combinaison linéaire de I et N, pus de I et T.

- **1 pt : $3I$ et N commutent**
- **1 pt :** $n \geqslant 1$
- **1 pt :** $I^n = I$
- **1 pt :** $N^k = 0$

- **1 pt : formule finale**
- **1 pt : cas** $n = 0$

5. a) Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n3^{n-1}A - (n-1)3^n I$.

- **1 pt : écrire** N **avec** I **et** T
- **2 pts : utilisation de** $A^n = PT^nP^{-1}$

b) Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la première question pour déterminer A^{-1} en fonction de I et de A.

- **2 pts :** A^{-1}

c) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

- **1 pt**

II. Exercice 2 /39

L'objet de ce problème est la recherche du comportement asymptotique du maximum sur $[0, 1]$ d'une suite de fonction.
Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x + 1}$$

1. *Variation de* f

a) Calculer la dérivée f' de f.

- **1 pt :** f **dérivable**
- **1 pt : calcul** f'

b) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution α et une seule sur $\mathbb{R}_+$.
Pour ce faire, on étudiera la variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = (1 - x)\ \mathrm{e}^x + 1$$

- **1 pt :** $f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$
- **1 pt :** g **dérivable et** g'
- **1 pt : variations de** g **(dont limites)**
- **3 pts : théorème de la bijection (hypothèses, intervalle image,** $0 \in]-\infty, 2]$**)**

c) Prouver que : $f(\alpha) = \alpha - 1$.

- **2 pts**

d) Dresser le tableau de variation de f et donner l'allure du graphe de cette fonction.

- **2 pts : tableau de variations (variations + limites)**
- **4 pts : courbe (2 tangentes, placer** α**, allure générale)**

2. *Approximation de α*
Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$\varphi(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$$

a) Prouver que α est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$.

- **2 pts : équivalence (dont 1 pt : $\mathrm{e}^{-x} > 0$)**
- **1 pt : solution unique**

b) Montrer que $\alpha > 1$. En déduire que :

$$\alpha - 1 < \mathrm{e}^{-1}$$

- **1 pt : calcul $g(\alpha)$, $g(1)$**
- **1 pt : application de g^{-1}**
- **1 pt : φ strictement décroissante**
- **1 pt : application de φ**

c) Établir que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1 :

$$\varphi(x) \geqslant 1$$

et que

$$|\varphi(x) - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-1}\, |x - \alpha|$$

- **1 pt : $\varphi(x) \geqslant 1$**
- **4 pts : IAF (φ dérivable, inégalité sur φ', $(x, \alpha) \in [1, +\infty[^2$, $\varphi(\alpha) = \alpha$)**

d) Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $[1; +\infty[$ définie par la condition initiale $\alpha_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\alpha_{n+1} = \varphi(\alpha_n)$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|\alpha_n - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-(n+1)}$$

- **1 pt : $\alpha_n \geqslant 1$**
- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité**

e) En déterminant au préalable le nombre d'itérations nécessaires, écrire en **Scilab** un programme permettant de trouver et d'**afficher** une valeur décimale approchée $\tilde{\alpha}$ de α telle que :

$$|\tilde{\alpha} - \alpha| \leqslant 10^{-6}$$

- **1 pt : transitivité**
- **2 pts : valeur de N (équivalence + $N \in \mathbb{N}$)**
- **3 pts : programme (initialisation, boucle for, disp)**

III. Exercice 3 /47

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de classe C^2, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x^2)$$

et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
On donne la valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.

Partie I : Étude de f et tracé de $\mathcal{C}$ /24

1. *a)* Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$.

- **1 pt : f dérivable**
- **1 pt : calcul f'**

b) En déduire le sens de variation de f.

- **1 pt : variations de f**
- **2 pts : limite en $+\infty$ (dont 1 pt : résultat seul)**
- **1 pt : limite en $-\infty$**

c) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.

- **1 pt**

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

- **3 pts (si non obtenus en *1.b)*)**

3. Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

- **2 pts (définition, coordonnées)**

4. Tracer $\mathcal{C}$. On utilisera un repère orthonormé d'unité graphique 2 centimètres, et on précisera la tangente à $\mathcal{C}$ en l'origine et en chacun des points d'inflexion.

- **3 pts : équations des tangentes**
- **3 pts : courbe (tangentes, points d'inflexion, allure générale)**

5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x f(x) dx$.
A cet effet, on pourra utiliser le changement de variable défini par $t = 1 + x^2$.

- **3 pts : changement de variables ($\mathcal{C}^1$, dx, bornes)**
- **3 pts : reste du calcul**

Partie II : Étude d'une suite et d'une série associées à f /23

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

- **1 pt : $f(x) \leqslant x$**
- **1 pt : $u_{n+1} \leqslant u_n$**

2. Établir que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

- **1 pt :** $f(x) \geqslant 0$
- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**
- **1 pt : théorème de convergence monotone**
- **1 pt : continuité de** f
- **1 pt : points fixes de** f

3. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche un entier n tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$.

- **4 pts (initialisation, condition while, mise à jour** n **et** u**, disp)**

4. ***a)*** Établir : $\forall x \in [0;1],\ f(x) \leqslant x - \dfrac{1}{2}x^2$.

- **3 pts**

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 \ \leqslant\ 2\ (u_n - u_{n+1})$.

- **1 pt :** $x^2 \leqslant 2(x - f(x))$
- **1 pt :** $u_n \in [0,1]$
- **1 pt : reste**

c) Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge.

- **1 pt :** $\sum (u_n - u_{n+1})$ **converge (série télescopique)**
- **3 pts : critère de comparaison des SATP (termes généraux** $\geqslant 0$**, comparaison, la série télescopique converge). -1 si le critère est mal cité**

IV. Exercice 4 /45

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$ est définie pour tout réel x.

- **2 pts**

On considère désormais la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$$

2. Établir que f est impaire.

- **3 pts : changement de variables ($\mathcal{C}^1$, dx, bornes)**
- **1 pt : reste du calcul**

3. *a)* Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt : introduction de G**
- **1 pt : f de classe $\mathcal{C}^1$**

b) Déterminer $f'(x)$, pour tout réel x, et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt : calcul f'**
- **2 pts : variation de f**

4. *a)* En utilisant la relation $t^2 \leqslant t^2+1 \leqslant t^2+2t+1$, valable pour tout t positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)$$

- **2 pts : justifications**
- **1 pt : croissance intégrale**
- **1 pt : bornes dans l'ordre croissant**
- **2 pts : calcul des intégrales (dont 1 pt pour les $|.|$)**

b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- **2 pts : limite de $\ln(2x+1) - \ln(x+1)$**
- **1 pt : théorème d'encadrement**

c) Dresser le tableau de variation complet de f.

- **1 pt : limite**
- **1 pt : tableau**

d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

- **3 pts : théorème de la bijection (hypothèses, intervalle image, $0 \in]-\ln(2), \ln(2)[$)**
- **1 pt : 0 solution évidente**

5. ***a)*** Montrer que, pour tout réel x, on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

- **2 pts**

b) Déterminer la dérivée de la fonction h qui, à tout réel x, associe $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

- **1 pt : dérivabilité**
- **1 pt : calcul**

c) En déduire une expression explicite de $f(x)$.

- **1 pt :** h **primitive de** g
- **1 pt : calcul**

6. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.

a) Établir que, pour tout réel x strictement positif, on a : $x - f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}\, dt$.

- **1 pt :** $x = \displaystyle\int_x^{2x} 1 \ dt$
- **2 pts : reste du calcul**

b) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ 0 \leqslant x - f(x) \leqslant \dfrac{7}{6}x^3$.

- **3 pts : encadrement intégrande**
- **1 pt : croissance intégrale**
- **1 pt : bornes dans l'ordre croissant**

c) Conclure que : $f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} x$.

- **1 pt :** $x > 0$
- **1 pt : encadrement de** $\dfrac{f(x)}{x}$
- **1 pt : théorème d'encadrement**

d) Montrer que l'on a aussi : $f(x) \underset{x \to 0^-}{\sim} x$.

- **2 pts**