# DS1 (version B)

## I. Exercice 1 (inspiré de EDHEC 2016)

On désigne par $Id$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par $I$ la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

***1.*** Calculer $A^2 - 6A$ puis déterminer un polynôme annulateur de $A$ de degré 2.

*Démonstration.*

- Tout d'abord : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 12 \\ -24 & -3 & 24 \\ -24 & -12 & 33 \end{pmatrix}$
- Ainsi : $A^2 - 6A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 12 \\ -24 & -3 & 24 \\ -24 & -12 & 33 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -6 & 12 \\ -24 & 6 & 24 \\ -24 & -12 & 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} - 9I.$

$$\boxed{A^2 - 6A = -9I}$$

$$\boxed{\text{Donc } P(X) = X^2 - 6X + 9 \text{ est } \textbf{un} \text{ polynôme annulateur de degré 2 de } A.}$$

**Remarque**

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul $P$. On peut même démontrer (pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré $n$.
- Si $P$ est un polynôme annulateur de $A$ alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\, P$ est toujours un polynôme annulateur puisque :
$$(\alpha\, P)(A) = \alpha\, P(A) = 0$$
Cela suffit à démontrer que $A$ possède une infinité de polynômes annulateurs. On peut en obtenir d'autres : par exemple $Q(X) = (X - 5)\ P(X)$ est un polynôme annulateur de $A$ puisque :
$$Q(A) = (A - 5\,I)\ P(A) = 0$$
- Parler `DU` polynôme annulateur d'une matrice n'a donc aucun sens. □

***2.*** ***a)*** En déduire la seule valeur propre de $A$ (donc aussi de $f$).

*Démonstration.*

- On remarque que $P(X) = X^2 - 6X + 9 = (X - 3)^2$. Ainsi, l'unique racine de $P$ est 3.
Or le spectre de $A$ est inclus dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur de $A$.

$$\boxed{\text{Autrement dit : } \mathrm{Sp}(A) \subset \{3\}.}$$

**Remarque**

- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de $A$.
- Si c'était le cas, $A$ aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus 3 !).
Par exemple, comme $Q(X) = (X-5)\ P(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.

- On dit parfois que les racines d'un polynôme annulateur sont des valeurs propres **possibles** de $A$ (comprendre qu'elles sont potentiellement des valeurs propres). Il faut alors démontrer qu'elles sont réellement des valeurs propres.

- Montrons maintenant que 3 est une valeur propre de $A$ (*i.e.* que $\{3\} \subset \mathrm{Sp}(A)$).

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A-3I) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \\
&= \dim\left( \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right)\right) \\
&= \dim\left( \mathrm{Vect}\left(-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)\right) \\
&= \dim\left( \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)\right) \ = \ 1 < 3
\end{aligned}$$

La matrice $A - 3I$ n'est pas inversible, ce qui signifie que 3 est valeur propre de $A$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f) = \{3\}}$$

**Remarque**

- On peut aussi affimer que $A - 3\,I$ est non inversible en remarquant que cette matrice possède deux vecteurs colonnes (ou lignes) égaux (colinéaires suffirait). □

***b)*** La matrice $A$ est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

*Démonstration.*

- D'après la question précédente, $A$ possède 3 comme unique valeur propre.
- Supposons par l'absurde que $A$ est diagonalisable.
  Il existe alors $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = P\,(3\,I_3)\,P^{-1} = 3\,PP^{-1} = 3\,I_3$$

  ce qui est impossible puisque $A \neq 3\,I_3$.

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

- Montrons que $A$ est inversible.
  On sait que $\mathrm{Sp}(A) = \{3\}$. Donc en particulier, 0 n'est pas valeur propre de $A$.

$$\boxed{\text{Ainsi } A \text{ est inversible.}}$$

□

**Remarque**

- Il est aussi possible de démontrer que $A$ n'est pas diagonalisable en déterminant la dimension de $E_3(A)$, espace propre associé à l'unique valeur propre 3.
  On démontre alors que : $\dim(E_3(A)) = 2 \neq 3$ (*cf* question suivante).
- Concernant l'inversibilité de $A$ on utilise le fait que :

$$A \text{ non inversible } \Leftrightarrow 0 \text{ est valeur propre de } A$$

  On peut aussi démontrer l'inversibilité de $A$ en déterminant son inverse par la méthode proposée en ***5.b)***.
- Toutes les méthodes donnant le bon résultat sont acceptées. Évidemment, les méthodes les plus longues produisent une perte de temps qui finit par vous pénaliser à terme.

***3.*** Déterminer une base $(u_1, u_2)$ du sous-espace propre de $f$ associé à la valeur propre de $f$.

*Démonstration.*

- Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in E_3(f) & \Longleftrightarrow & f(u) = 3\ u \\
& \Longleftrightarrow & (f - 3\ Id)(u) = 0 \\
& \Longleftrightarrow & (A - 3\ I_3)\ U = 0 \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\ 2x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ -\ 4x & - & 2y & + & 4z & = & 0 \\ -\ 4x & - & 2y & + & 4z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \ 2x + y - 2z = 0 \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \ 2x = -y + 2z \right.
\end{array}$$

*(on utilise 2 variables auxiliaires - $x$ et $y$ ici - pour faire apparaître le système sous forme échelonnée)*
On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_3(f) & = & \left\{ u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ f(u) = 3u \right\} \\[2mm]
& = & \left\{ u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ x = -\frac{1}{2} y + z \right\} \\[2mm]
& = & \left\{ (-\frac{1}{2} y + z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R} \right\} \\[2mm]
& = & \left\{ y \cdot (-\frac{1}{2}, 1, 0) + z \cdot (1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R} \right\} \\[2mm]
& = & \text{Vect}\left( (-\frac{1}{2}, 1, 0), (1, 0, 1) \right)
\end{array}$$

- Notons $u_1 = (-1, 2, 0)$ et $u_2 = (1, 0, 1)$. La famille $(u_1, u_2)$ est :
  × génératrice de $E_3(f)$.
  × libre car constituée de **deux** vecteurs non colinéaires.
  C'est donc une base de $E_3(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi } (u_1, u_2) \text{ est une base de } E_3(f).}$$

**Remarque**

- Comme $A$ est la matrice représentative de $f$ dans la base $\mathcal{B}$, alors : $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f)$.
- Par contre, comme on le voit ici : $E_3(A) \neq E_3(f)$. En effet :
  × $E_3(A)$ est un sous-ensemble de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, ev dont les vecteurs sont des matrices de taille $3 \times 1$.
  × $E_3(f)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$, ev dont les vecteurs sont des triplets de réels.
- Ce qu'on peut résumer par : $(x, y, z) \neq \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
- Il y a d'autres choix pour $(u_1, u_2)$. Par exemple : $u_1 = (1, -2, 0)$ et $u_2 = (0, 2, 1)$. Ce choix a peu d'importance : il influence les calculs qui suivent mais n'en modifie pas la complexité. □

*4. a)* On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille $(u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

*Démonstration.*

- Tout d'abord : $u_3 = e_1 + e_2 + e_3 = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1) = (1, 1, 1)$.
- Montrons que la famille $((-1, 2, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1))$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que :
  $$\lambda_1 \cdot (-1, 2, 0) + \lambda_2 \cdot (1, 0, 1) + \lambda_3 \cdot (1, 1, 1) = 0$$
  On obtient alors :
  $$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ 2\,\lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$
  $$\overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\,\lambda_2 & + & 3\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$
  $$\overset{L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\,\lambda_2 & + & 3\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$
  $$\Longleftrightarrow \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right.$$
  *(par remontées successives)*
  La famille $(u_1, u_2, u_3)$ est donc libre.
- De plus, $\mathrm{Card}((u_1, u_2, u_3)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ est donc une base de } \mathbb{R}^3.}$$

**Remarque**

- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille $(u_1, u_2, u_3)$ est un ensemble qui contient 3 vecteurs. Elle est donc finie, de cardinal 3 (ce qu'on note $\mathrm{Card}((u_1, u_2, u_3)) = 3$).
- $\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3)$ est l'ev constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $(u_1, u_2, u_3)$. C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base $(u_1, u_2, u_3)$ d'un ev, tout vecteur se décompose de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : $\cancel{\mathrm{Card}(\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3))}$ et $\cancel{\dim((u_1, u_2, u_3))}$ n'ont aucun sens ! □

***b)*** Vérifier que la matrice $T$ de $f$ dans la base $(u_1, u_2, u_3)$ est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.

*Démonstration.*

- Notons $U_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_3 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(u_1)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1) = A \times U_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
  On en déduit que : $f(u_1) = 3 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.
  Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f(u_1)) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(u_2)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_2) = A \times U_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
  On en déduit que : $f(u_1) = 0 \cdot u_1 + 3 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.
  Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f(u_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(u_3)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_3) = A \times U_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
  On cherche alors à décomposer ce vecteur suivant $(U_1, U_2, U_3)$.
  Autrement dit, on cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  On obtient alors le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 2 \\ 2\,\alpha & & & + & \gamma & = & 1 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 2 \\ & & 2\,\beta & + & 3\,\gamma & = & 5 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 2 \\ & & 2\,\beta & + & 3\,\gamma & = & 5 \\ & & & - & \gamma & = & -3 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{\iff}} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -\alpha & + & \beta & & & = & -1 \\ & & 2\,\beta & & & = & -4 \\ & & & - & \gamma & = & -3 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -2\,\alpha & & & & & = & 2 \\ & & 2\,\beta & & & = & -4 \\ & & & - & \gamma & = & -3 \end{array} \right.$$

$$\overset{\substack{L_1 \leftarrow -L_1/2 \\ L_2 \leftarrow L_2/2 \\ L_3 \leftarrow -L_3}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcccr} \alpha & & & = & -1 \\ & \beta & & = & -2 \\ & & \gamma & = & 3 \end{array} \right.$$

On en déduit que : $f(u_3) = -1 \cdot u_1 - 2 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3$.

Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f(u_3)) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } T = \mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.}$$

□

***c)*** En écrivant $T = 3I + N$, déterminer, pour tout entier naturel $n$, la matrice $T^n$ comme combinaison linéaire de $I$ et $N$, pus de $I$ et $T$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après l'énoncé, $N = T - 3 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- De plus : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0$.
- Les matrices $3I$ et $N$ commutent (car la matrice $I$ commute avec toutes les matrices).
  On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{array}{rcll}
T^n & = & (3\,I+N)^n & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3\,I)^{n-k}\ N^k \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}\, I^{n-k}\ N^k & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}\, I\ N^k \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}\ N^k & \textit{(car on a : } \forall j \in \mathbb{N},\ I^j = I\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 3^{n-k}\ N^k + \sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}\ N^k & \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 3^{n-k}\ N^k & \textit{(car on a montré : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0\textit{)} \\
& = & \binom{n}{0} 3^n\ N^0 + \binom{n}{1} 3^{n-1}\ N^1 & \\
& = & 3^n I + n\ 3^{n-1}\ N &
\end{array}$$

- Enfin : $3^0\ I + 0\ 3^{-1}\ N = I$ et $T^0 = I$.
  La formule précédente reste valable pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ T^n = 3^n\ I + n\ 3^{n-1}\ N.}$$

- De plus, comme $N = T - 3I$, on obtient :

$$T^n \ = \ 3^n\ I + n\ 3^{n-1}\ (T - 3I) \ = \ 3^n\ I + n\ 3^{n-1}\ T - n\ 3^n\ I \ = \ n\ 3^{n-1}\ T - (n-1)\ 3^n\ I$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ T^n = n\ 3^{n-1}\ T - (n-1)\ 3^n\ I.}$$

**Remarque**

- Comme noté dans la démonstration, l'hypothèse $n \geqslant 1$ est essentielle pour pouvoir découper la somme. Le cas $n = 0$ doit donc être traité à part.
- Ici, la matrice $N$ vérifie : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$. □

***5. a)*** Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n3^{n-1}A - (n-1)3^n I$.

*Démonstration.*

- Comme $T$ est la matrice de $f$ dans la base $(u_1, u_2, u_3)$, on en déduit (passerelle matrice-endomorphisme) :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^n = n3^{n-1}\ f - (n-1)\,3^n\ Id$$
- Comme $A$ est la matrice de $f$ dans la base $(e_1, e_2, e_3)$, on en déduit (passerelle matrice-endomorphisme dans l'autre sens) :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = n3^{n-1}\ A - (n-1)\,3^n\ I}$$

**Remarque**

- C'est la manière subtile de rédiger cette question.
  Mais, encore une fois, ce n'est pas la seule acceptée.
- On pouvait aussi procéder comme suit.
  Notons $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Alors :
$$\begin{array}{rcl} A & = & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \\ & = & P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \ = \ P \times T \times P^{-1} \end{array}$$
  Par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\,T^n\,P^{-1}$.
  *(la récurrence n'est pas explicitement demandée dans le sujet, il n'est donc pas utile de la faire)*
  Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $T^n = n\ 3^{n-1}\ T - (n-1)\ 3^n\ I$. Donc :
$$\begin{array}{rcl} A^n & = & P\ T^n\ P^{-1} \ = \ P\ (n\ 3^{n-1}\ T - (n-1)\ 3^n\ I)\ P^{-1} \\ & = & n\ 3^{n-1}\ P\ T\ P^{-1} - (n-1)\ 3^n\ P\ P^{-1} \\ & = & n\ 3^{n-1}\ A - (n-1)\ 3^n\ I \end{array}$$
  Et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = n\ 3^{n-1}\ A - (n-1)\ 3^n\ I$. □

***b)*** Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la première question pour déterminer $A^{-1}$ en fonction de $I$ et de $A$.

*Démonstration.*
D'après la question ***1.***, $A^2 - 6A = -9I$.

On en déduit que : $-\dfrac{1}{9}\ (A^2 - 6A) = I$. Et ainsi :
$$A \times \left(-\frac{1}{9}(A - 6I)\right) = I$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } A \text{ est inversible, d'inverse : } A^{-1} = -\frac{1}{9}\ (A - 6I).}$$ □

*c)* Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

*Démonstration.*
Si $n = -1$, on obtient :

$$\begin{aligned} n\ 3^{n-1}\ A - (n-1)\ 3^n\ I &= (-1)\ 3^{-1-1}\ A - (-1-1)\ 3^{-1}\ I \\ &= (-1)\ \frac{1}{3^2}\ A - (-2)\ \frac{1}{3}\ I \ = \ -\frac{1}{9}\ A + \frac{2}{3}\ I \\ &= -\frac{1}{9}(A - 6I) \ = \ A^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi, la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

□

# II. Exercice 2 (ESCP 1991-G)

L'objet de ce problème est la recherche du comportement asymptotique du maximum sur $[0, 1]$ d'une suite de fonction.

## Partie I : Étude du maximum d'une fonction

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x + 1}$$

***1.*** *Variation de $f$*

*a)* Calculer la dérivée $f'$ de $f$.

*Démonstration.*

- La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car c'est le quotient de :
  - $\times$ $x \mapsto x$, dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
  - $\times$ $x \mapsto \mathrm{e}^x + 1$, dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.
    *(on a même : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x + 1 > 0$)*
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$f'(x) = \frac{(\mathrm{e}^x + 1) - x\ \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = \frac{\mathrm{e}^x - x\ \mathrm{e}^x + 1}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \frac{(1-x)\ \mathrm{e}^x + 1}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}}$$

□

*b)* Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution $\alpha$ et une seule sur $\mathbb{R}_+$.
Pour ce faire, on étudiera la variation de la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = (1 - x)\ \mathrm{e}^x + 1$$

*Démonstration.*

- Remarquons tout d'abord que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ :

$$f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{(1-x)\ \mathrm{e}^x + 1}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = 0 \ \Leftrightarrow\ (1-x)\ \mathrm{e}^x + 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ g(x) = 0$$

  (la deuxième équivalence est vérifiée car $(1 + \mathrm{e}^x)^2 > 0$)

- La fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
$$g'(x) = -\mathrm{e}^x + (1-x)\ \mathrm{e}^x = -x\ \mathrm{e}^x \leqslant 0 \quad \textit{(car } x \geqslant 0\textit{)}$$
- On en déduit le tableau de variations suivants :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| Signe de $g'(x)$ | $0$ | $-$ |
| Variations de $g$ | $2$ | $-\infty$ |

En effet :

× $\lim\limits_{x\to 0} (1-x)\ \mathrm{e}^x + 1 = 0 = g(0) = \mathrm{e}^0 + 1 = 2$

× comme $1 - x \underset{x\to+\infty}{\sim} -x$ alors $(1-x)\ \mathrm{e}^x \underset{x\to+\infty}{\sim} -x\ \mathrm{e}^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
Et ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

- La fonction $g$ est :

× continue sur $[0,+\infty[$,

× strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

Ainsi, $g$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $g([0,+\infty[)$. Or :
$$g([0,+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} g(x), g(0)\right] = ]-\infty, 2]$$
Comme $0 \in ]-\infty, 2]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0,+\infty[$.

$\boxed{\text{On en déduit que } f'(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \in \mathbb{R}_+.}$

☐

***c)*** Prouver que : $f(\alpha) = \alpha - 1$.

*Démonstration.*
On raisonne par équivalence.

$$\begin{array}{rl} & f(\alpha) = \alpha - 1 \\ \Leftrightarrow & \dfrac{\alpha}{\mathrm{e}^\alpha + 1} = \alpha - 1 \\ \Leftrightarrow & \alpha = (\alpha-1)\ (\mathrm{e}^\alpha + 1) \\ \Leftrightarrow & \alpha = (\alpha - 1)\ \mathrm{e}^\alpha + (\alpha - 1) \\ \Leftrightarrow & 0 = (\alpha-1)\ \mathrm{e}^\alpha - 1 \\ \Leftrightarrow & 0 = -g(\alpha) \\ \Leftrightarrow & g(\alpha) = 0 \end{array}$$

La dernière égalité étant vérifiée, il en est de même de la première.

$\boxed{f(\alpha) = \alpha - 1}$

☐

***d)*** Dresser le tableau de variation de $f$ et donner l'allure du graphe de cette fonction.

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

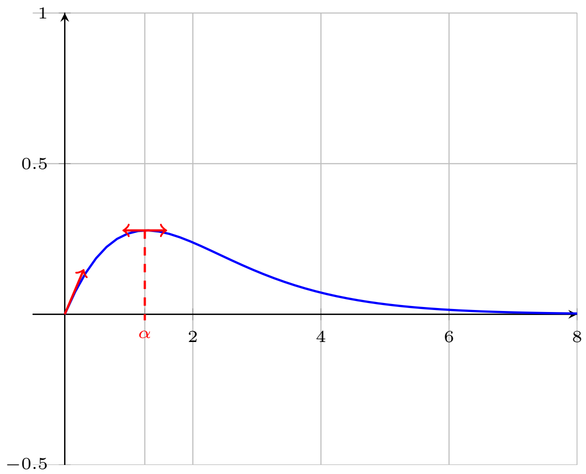
- Comme $(e^x + 1)^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $(1 - x)\ e^x + 1 = g(x)$.
  On peut alors déduire du tableau de variations de $g$ celui de $f$ :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $g'(x)$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| Variations de $g$ | $2$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |
| Signe de $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Signe de $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Variations de $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $\alpha - 1$ | $\searrow$ | $0$ |

  En effet :
  $\times$ $f(x) = \dfrac{x}{e^x + 1} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{x}{e^x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

- D'autre part, la courbe de $f$ :
  $\times$ admet une tangente horizontale en $\alpha$.
  $\times$ admet pour tangente la droite d'équation $y = f(0) + f'(0)\ (x - 0) = \dfrac{1}{2}\ x$.

- On en déduit l'allure suivante pour le graphe de $f$.




□

*2. Approximation de $\alpha$*
Soit $\varphi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$\varphi(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$$

***a)*** Prouver que $\alpha$ est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$.

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} \varphi(x) = x \ \Leftrightarrow \ x = 1 + \mathrm{e}^{-x} \ & \Leftrightarrow \ (1-x) + \mathrm{e}^{-x} = 0 \\ & \Leftrightarrow \ ((1-x)\ \mathrm{e}^{x} + 1)\ \mathrm{e}^{-x} = 0 \\ & \Leftrightarrow \ (1-x)\ \mathrm{e}^{x} + 1 = 0 \qquad \textit{(car } \mathrm{e}^{-x} > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow \ g(x) = 0 \end{aligned}$$

Or, par définition, $\alpha$ est l'unique solution, dans $\mathbb{R}_+$, de l'équation $g(x) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \alpha \text{ est l'unique solution de l'équation } \varphi(x) = x.}$$

□

***b)*** Montrer que $\alpha > 1$. En déduire que :

$$\alpha - 1 < \mathrm{e}^{-1}$$

*Démonstration.*
- Tout d'abord :
  × $g(\alpha) = 0$.
  × $g(1) = (1-1)\ \mathrm{e}^1 + 1 = 1$.
  Ainsi : $g(\alpha) < g(1)$.
- Or, d'après le théorème de la bijection, la fonction $g^{-1} : [0, +\infty[ \ \to \ ]-\infty, 2]$ est strictement décroissante. En appliquant $g^{-1}$ de part et d'autre de l'égalité, on obtient :

$$\boxed{\alpha > 1}$$

- La fonction $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
  Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors : $\varphi'(x) = -\mathrm{e}^{-x} < 0$.
  Ainsi, la fonction $\varphi$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
  En appliquant $\varphi$ de part et d'autre de l'inégalité précédente, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \varphi(\alpha) & < & \varphi(1) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \alpha & & 1 + \mathrm{e}^{-1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \alpha - 1 < \mathrm{e}^{-1}.}$$

**Remarque**
On pouvait rédiger autrement. Détaillons cette solution.

D'après la question précédente : $\varphi(\alpha) = \alpha$. Ainsi : $\alpha = 1 + \mathrm{e}^{-\alpha}$. Et donc :

$$\alpha - 1 = \mathrm{e}^{-\alpha} < \mathrm{e}^{-1}$$

En effet, comme $\alpha > 1$, alors $-\alpha < -1$ et $\mathrm{e}^{-\alpha} < \mathrm{e}^{-1}$ par stricte croissance de la fonction exp.
D'où le résultat.

□

***c)*** Établir que, pour tout nombre réel $x$ supérieur ou égal à 1 :

$$\varphi(x) \geqslant 1$$

et que

$$|\varphi(x) - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-1} |x - \alpha|$$

*Démonstration.*
Soit $x \geqslant 1$.

- Tout d'abord :
$$\varphi(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x} > 1 \quad \text{car} \quad \mathrm{e}^{-x} > 0$$
$$\boxed{\forall x \geqslant 1,\ \varphi(x) \geqslant 1}$$
- D'autre part :
$$|\varphi'(x)| = |-\mathrm{e}^{-x}| = \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$$
En effet, comme $x \geqslant 1$, on a $-x \leqslant -1$ et $\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$ par application de la fonction exp strictement croissante.
- D'après ce qui précède :
  × $\varphi$ est dérivable sur $[1, +\infty[$,
  × $\forall x \in [1, +\infty[$, $|\varphi'(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-1}$.

  On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis que :
$$\forall (u, v) \in [1, +\infty[^2,\ |\varphi(v) - \varphi(u)| \ \leqslant \ \mathrm{e}^{-1} \ |v - u|$$
En appliquant cette inégalité à $v = x \in [1, +\infty[$ et $u = \alpha \in [1, +\infty[$ (d'après la question ***2.b)***), on obtient :
$$|\varphi(x) - \varphi(\alpha)| \ \leqslant \ \mathrm{e}^{-1} \ |x - \alpha|$$
Enfin, d'après la question ***2.a)***, $\varphi(\alpha) = \alpha$.
$$\boxed{\forall x \geqslant 1,\ |\varphi(x) - \alpha| \ \leqslant \ \mathrm{e}^{-1} \ |x - \alpha|}$$

□

***d)*** Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $[1; +\infty[$ définie par la condition initiale $\alpha_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\alpha_{n+1} = \varphi(\alpha_n)$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$|\alpha_n - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-(n+1)}$$

*Démonstration.*

- Par une récurrence immédiate, on peut démontrer la propriété affirmée par l'énoncé :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n \geqslant 1$$
En effet :
  × $\alpha_0 = 1 \geqslant 1$.
  × si $\alpha_n \geqslant 1$ alors, par la question ***2.c)***, $\alpha_{n+1} = \varphi(\alpha_n) \geqslant 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant l'inégalité précédente à $x = \alpha_n \in [1, +\infty[$, on obtient que :
$$|\ \underbrace{\varphi(\alpha_n)}_{= \alpha_{n+1}} - \alpha\ | \ \leqslant \ \mathrm{e}^{-1} \ |\alpha_n - \alpha|$$

- Démontrons alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$ : $|\alpha_n - \alpha| \leqslant e^{-(n+1)}$.
  - ► **Initialisation** :
    Remarquons que : $|\alpha_0 - \alpha| = |1 - \alpha| = \alpha - 1$ car $\alpha \geqslant 1$ d'après la question ***2.b)***.
    De plus, toujours d'après la question ***2.b)*** : $\alpha - 1 < e^{-1}$. On en déduit :
    $$|\alpha_0 - \alpha| \leqslant e^{-1}$$
    ce qui démontre $\mathcal{P}(0)$.
  - ► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $|\alpha_{n+1} - \alpha| \leqslant e^{-(n+2)}$).
    On remarque alors :
    $$\begin{array}{rcll} |\varphi(\alpha_n) - \alpha| & \leqslant & e^{-1}\ |\alpha_n - \alpha| & \textit{(d'après le point évoqué ci-dessus)} \\ & \leqslant & e^{-1}\ e^{-(n+1)} & \textit{(par hypothèse de récurrence } \mathcal{P}(n)\textit{)} \\ & = & e^{-1-(n+1)} \ = \ e^{-(n+2)} & \end{array}$$
    On en conclut que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ |\alpha_n - \alpha| \leqslant e^{-(n+1)}.}$$

□

***e)*** En déterminant au préalable le nombre d'itérations nécessaires, écrire en **Scilab** un programme permettant de trouver et d'**afficher** une valeur décimale approchée $\tilde{\alpha}$ de $\alpha$ telle que :
$$|\tilde{\alpha} - \alpha| \leqslant 10^{-6}$$

*Démonstration.*

- Afin de calculer une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-6}$ près, il suffit de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que :
  $$e^{-(N+1)} \leqslant 10^{-6}$$
- En effet, d'après la question précédente, on aura alors :
  $$|\alpha_N - \alpha| \leqslant e^{-(N+1)} \leqslant 10^{-6}$$
  et ainsi $\tilde{\alpha} = \alpha_N$ convient.
- On remarque alors que :
  $$\begin{array}{rcll} e^{-(n+1)} \leqslant 10^{-6} & \Leftrightarrow & -(n+1) \leqslant \ln(10^{-6}) & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & -(n+1) \leqslant -6\ \ln(10) & \\ & \Leftrightarrow & n+1 \geqslant 6\ \ln(10) & \\ & \Leftrightarrow & n \geqslant 6\ \ln(10) - 1 & \end{array}$$
  En choisissant $N = \lceil 6\ \ln(10) - 1 \rceil$ (ou tout entier supérieur), on obtient bien que $\alpha_N$ est une approximation de $\alpha$ à $10^{-6}$ près.

- Le programme **Scilab** suivant stocke les valeurs successives de $\alpha_n$ dans une variable `a`. Après $N$ itérations, on obtient la valeur attendue $\alpha_N$ qui est alors affichée.

```
N = ceil(6 * log(10) - 1)
a = 1
for i = 1:N
    a = 1 + exp(-a)
end
disp(a)
```

$\square$

## Exercice 3 (EML 2010)

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de classe $C^2$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x^2)$$

et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.
On donne la valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.

### Partie I : Étude de $f$ et tracé de $\mathcal{C}$

***1. a)*** Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$.

*Démonstration.*

- La fonction $x \mapsto \ln(1 + x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car est la composée $h \circ g$ des fonctions :
  - $\times$ $g : x \mapsto 1 + x^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et telle que $g(\mathbb{R}) \subset \,]0, +\infty[$.
    (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \geqslant 1 > 0$)
  - $\times$ $h : x \mapsto \ln(x)$, dérivable sur $]0, +\infty[$.
- On en déduit que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x^2}\, 2x = \frac{(1 + x^2) - 2x}{1 + x^2} = \frac{1 - 2x + x^2}{1 + x^2} = \frac{(1 - x)^2}{1 + x^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{(1 - x)^2}{1 + x^2}}$$

$\square$

***b)*** En déduire le sens de variation de $f$.

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Comme $1 + x^2 > 0$, la quantité $f'(x) = \dfrac{(1 - x)^2}{1 + x^2}$ est du signe de $(1 - x)^2$.
  On en déduit le tableau de variations suivant pour $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

- Détaillons les différents éléments de ce tableau.
  - Déterminons tout d'abord $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Si $x > 0$ :
$$\ln(1+x^2) = \ln\left(x^2 \, \left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right) = \ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) = 2\,\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$
    On a alors :
$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x - \ln(1+x^2) \\ & = & x - 2\,\ln(x) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \\ & = & x\left(1 - 2\,\dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right) \end{array}$$
    Or : $\dfrac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.
    Et : $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$ et $x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
    On en déduit que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$
  - Déterminons maintenant $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Remarquons que :
    × $x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$
    × comme $1+x^2 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors, par théorème de composition des limites : $-\ln(1+x^2) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
$$\boxed{\text{On en déduit que : } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$$

**Remarque**
- On utilise dans cette démonstration l'égalité : $\ln(x^2) = 2\ln(x)$. Insistons sur le fait que cette égalité n'est vérifiée que lorsqu'on peut l'écrire. Autrement dit, cette égalité est vérifiée seulement lorsque $x > 0$ (la quantité $\ln(x)$ est alors bien définie).
- Dans le cas où $x < 0$ on peut écrire :
$$\ln(x^2) = \ln((-x)(-x)) = \ln(-x) + \ln(-x) = 2\ln(-x)$$ □

***c)*** Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.

*Démonstration.*
Par le même raisonnement qu'en ***1.a)***, on démontre que la fonction $f$ est deux fois dérivable (et même $C^\infty$) sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{array}{rcl} f''(x) & = & \dfrac{2\,(1-x)(-1)(1+x^2) - (1-x)^2\,2x}{(1+x^2)^2} \\ & = & -2\,(1-x)\,\dfrac{(1+x^2) + x\,(1-x)}{1+x^2} \\ & = & -2\,(1-x)\,\dfrac{1+\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{(1+x^2)^2} \quad = \quad -2\,(1-x)\,\dfrac{1+x}{(1+x^2)^2} \end{array}$$
$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x) = 2\,(x-1)\,\frac{1+x}{(1+x^2)^2}}$$ □

***2.*** Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$ et la limite de $f$ en $+\infty$.

*Démonstration.*
Cette question a été résolue en ***1.b)***.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

**Remarque**

- En question ***1.b)***, il est demandé de donner les variations de $f$. Formellement, on ne demande donc pas le tableau de variations. On l'a fait car c'est le bon outil pour représenter graphiquement les choses. Dans ce cas, on doit exposer les calculs de limite en ***1.b)***.
- Il faut veiller à éviter de renvoyer le correcteur à une autre page / question pour la résolution d'une question. Il faut au contraire toujours faciliter la lecture pour le correcteur. En commençant par respecter scrupuleusement la numérotation des questions.
- L'ordre des questions de l'énoncé n'était peut-être pas heureux mais en lisant l'énoncé jusqu'au bout, on évite de répondre aux questions au mauvais endroit. On s'efforcera de respecter au maximum l'esprit de l'énoncé. □

***3.*** Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $(1+x^2)^2 > 0$, $f''(x)$ est du signe de $(x-1)(1+x)$.
C'est un polynôme de degré 2 dont le cœfficient du terme de plus haut degré est positif.
On en déduit que :

– $\forall x \in \,]-1,1[,\ f''(x) < 0$
*($f''(x) < 0$ dans l'intervalle défini par les racines du polynôme)*

– $\forall x \in \,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[,\ f''(x) > 0$

Ainsi, $f''$ s'annule en changeant de signe en $-1$ et en $1$.

$$\boxed{\text{La courbe représentative de } f \text{ admet deux points d'inflexion : } (-1,-1-\ln(2)) \text{ et } (1, 1-\ln(2)).}$$

**Remarque**
On pouvait aussi dresser le tableau de signe de $f''(x)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Signe de $1+x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| Signe de $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

□

*4.* Tracer $\mathcal{C}$. On utilisera un repère orthonormé d'unité graphique 2 centimètres, et on précisera la tangente à $\mathcal{C}$ en l'origine et en chacun des points d'inflexion.

*Démonstration.*

- Déterminons l'équation des tangentes demandées.
  - Au point $(0, f(0))$, la courbe $\mathcal{C}$ admet pour tangente la droite d'équation :

$$y = f(0) + f'(0)(x-0) = x$$

  - Au point $(-1, f(-1))$, la courbe $\mathcal{C}$ admet pour tangente la droite d'équation :

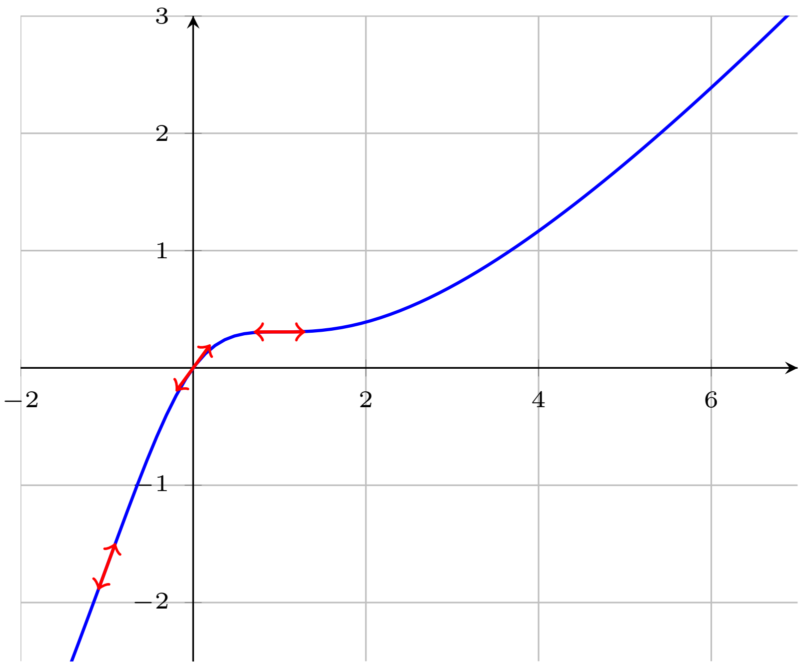
$$y = f(-1) + f'(-1)(x-(-1)) = (-1-\ln(2)) + 2\ (x+1) = 2x + (1-\ln(2))$$

  - Au point $(1, f(1))$, la courbe $\mathcal{C}$ admet pour tangente la droite d'équation :

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 - \ln(2)$$

*(comme $f'(1) = 0$, on obtient une tangente horizontale)*

- En regroupant toutes les informations précédentes on obtient le graphe suivant.




□

**5.** Calculer $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\ dx$.
A cet effet, on pourra utiliser le changement de variable défini par $t = 1 + x^2$.

*Démonstration.*

- La fonction $x \mapsto x f(x)$ est continue sur $[0,1]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x f(x) dx$ est donc bien définie.
  Par linéarité de l'intégration, on a :

$$\int_0^1 x f(x)\ dx \ = \ \int_0^1 x\ \left(x - \ln(1+x^2)\right)\ dx \ = \ \int_0^1 x^2\ dx - \int_0^1 x\ \ln(1+x^2)\ dx$$

- Tout d'abord :

$$\int_0^1 x^2 \, dx \;=\; \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \;=\; \frac{1}{3} \left[ x^3 \right]_0^1 \;=\; \frac{1}{3} \left(1^3 - 0^3\right) \;=\; \frac{1}{3}$$

- La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est $C^1$ sur $[0,1]$.
  On peut donc effectuer le changement de variable $\boxed{t = 1 + x^2}$.

  $t = 1 + x^2$
  (et donc $x^2 = t - 1$, et $x = \sqrt{t-1}$ car $\sqrt{x^2} = |x| = x$ puisque $x \in [0,1]$)
  $\hookrightarrow dt = 2x \; dx$ et $dx = \dfrac{1}{2x} \, dt = \dfrac{1}{2\sqrt{t-1}} \, dt$
  - $x = 0 \Rightarrow t = 1 + 0^2 = 1$
  - $x = 1 \Rightarrow t = 1 + 1^2 = 2$

  *(ainsi $t \in [1,2]$ et donc $t - 1 \in [0,1]$ ce qui permet de justifier l'écriture $\sqrt{t-1}$)*

  On a donc :

$$\int_0^1 x \; \ln(1+x^2) \; dx \;=\; \int_1^2 \cancel{\sqrt{t-1}} \; \ln(t) \; \frac{1}{2\,\cancel{\sqrt{t-1}}} \; dt \;=\; \frac{1}{2} \int_1^2 \ln(t) \; dt$$

  On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & \ln(t) & & u'(t) & = & \dfrac{1}{t} \\[2ex] v'(t) & = & 1 & & v(t) & = & t \end{array} \right.$$

  Cette IPP est valide car les fonctions $u$ et $v$ sont $C^1$ sur $[1,2]$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_1^2 \ln(t) \; dt & = & \left[ \, t \; \ln(t) \, \right]_1^2 - \displaystyle\int_1^2 \cancel{t} \; \frac{1}{\cancel{t}} \; dt \\ & = & (2 \; \ln(2) - 1 \; \cancel{\ln(1)}) - 1 \\ & = & 2 \; \ln(2) - 1 \end{array}$$

- Il reste à combiner tous ces résultats :

$$\int_0^1 x \; f(x) \; dx \;=\; \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(2 \ln(2) - 1\right) \;=\; \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \ln(2) \;=\; \frac{5}{6} - \ln(2)$$

$$\boxed{\int_0^1 x f(x) \; dx = \frac{5}{6} - \ln(2)}$$

□

**Remarque**

- On démontre, dans cette question, un résultat classique : la fonction $x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction ln.
- Ce résultat n'est pas officiellement au programme mais son utilisation directe ne serait certainement pas sanctionnée. Pour autant, il est important de savoir le démontrer rapidement : cela pourrait être explicitement demandé.

## Partie II : Étude d'une suite et d'une série associées à $f$

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

*1.* Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Remarquons tout d'abord que :

$$f(x) - x = -\ln(1 + x^2) \leqslant 0$$

En effet, $1 + x^2 \geqslant 1$ et donc, par croissance de la fonction ln, $\ln(1 + x^2) \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant x.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On appplique l'inégalité précédente à $x = u_n \in \mathbb{R}$. On obtient :

$$u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_n$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est bien décroissante.}}$$

□

*2.* Établir que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

*Démonstration.*

- La fonction $f$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit que :

$$f([0, +\infty[) \ = \ [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)[ \ = \ [0, +\infty[$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant 0}$$

- Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$ : $u_n \geqslant 0$.
  - ▸ **Initialisation** :
    Par définition : $u_0 = 1 \geqslant 0$.
    On en déduit $\mathcal{P}(0)$.
  - ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n + 1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \geqslant 0$).
    Par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant 0$.
    En appliquant l'inégalité au-dessus à $x = u_n \geqslant 0$, on obtient :

$$u_{n+1} = f(u_n) \geqslant 0$$

    D'où $\mathcal{P}(n + 1)$.

  Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

- La suite $(u_n)$ est :
  × décroissante,
  × minorée par 0.

  Elle est donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.

- La fonction $f$ étant continue en $\ell$, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ {\scriptstyle n \to +\infty}\downarrow & & {\scriptstyle n \to +\infty}\downarrow \\ \ell & = & f(\ell) \end{array}$$

Ainsi, $\ell$ est un point fixe de $f$.

- Déterminons alors l'ensemble des points fixes de $f$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) = x & \Leftrightarrow & \cancel{x} - \ln\left(1+x^2\right) = \cancel{x} \\ & \Leftrightarrow & \ln\left(1+x^2\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \exp\left(\ln\left(1+x^2\right)\right) = \exp(0) \\ & \Leftrightarrow & \cancel{1} + x^2 = \cancel{1} \\ & \Leftrightarrow & x^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow & x = 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ converge vers } 0, \text{ seul point fixe de } f.}$$

□

*3.* Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche un entier $n$ tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$.

*Démonstration.*

```
n = 0
u = 1
while u > 10 ^ (-3)
    n = n + 1
    u = u - log(1 + u ^ 2)
end
disp(n)
```

**Remarque**

- D'après la question précédente, on sait que la suite $(u_n)$ converge vers 0. On en déduit qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \ |u_n - 0| \leqslant 10^{-3}$$

Toujours d'après la question précédente : $|u_n - 0| = |u_n| = u_n$ car $u_n \geqslant 0$.

- Ainsi, on est assuré de la terminaison de la boucle `while`. Le programme consiste en fait à rechercher le premier rang $n_0$ tel que l'inégalité $u_n \leqslant 10^{-3}$ est vérifiée.

□

*4.* ***a)*** Établir : $\forall x \in [0;1], \ f(x) \leqslant x - \dfrac{1}{2}x^2$.

*Démonstration.*
Soit $x \in [0,1]$.

- Raisonnons par équivalence :

$$f(x) \leqslant x - \frac{1}{2}\,x^2 \ \Leftrightarrow \ \cancel{x} - \ln(1+x^2) \leqslant \cancel{x} - \frac{1}{2}\,x^2 \ \Leftrightarrow \ 2\ \ln(1+x^2) \geqslant x^2 \ \Leftrightarrow \ 2\ \ln(1+x^2) - x^2 \geqslant 0$$

- On considère alors la fonction $g : x \mapsto 2\ \ln(1+x^2) - x^2$.
Cette fonction est dérivable sur $[0,1]$ (même sur $\mathbb{R}$) car $x \mapsto \ln(1+x^2)$ l'est.

$$g'(x) \;=\; 2\ \frac{1}{1+x^2}\ 2x - 2x \;=\; 2x\ \frac{2}{1+x^2} - 1 \;=\; 2x\ \frac{2-(1+x^2)}{1+x^2} \;=\; 2x\ \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

- Tout d'abord : $1+x^2 \geqslant 1 > 0$.
Comme $x \in [0,1]$, $2x \geqslant 0$ et ainsi la quantité $g'(x)$ est du signe de $(1-x^2) = (1-x)(1+x)$ et est nulle si $x = 0$. On reconnaît l'expression d'un polynôme du second degré de racines évidentes $-1$ et $1$ et dont le cœfficient du terme de plus haut degré est négatif. Ainsi :

$$\forall x \in [-1,1],\ g'(x) \geqslant 0$$

- La fonction $g$ est donc croissante sur $[0,1]$. On en déduit que :

$$\forall x \in [0,1],\ g(x) \geqslant g(0) = 2\ \ln(1+0^2) - 0^2 = 0$$

$$\boxed{\text{Cette inégalité étant équivalente à celle qu'on souhaite montrer, on a bien : } \forall x \in [0,1],\ f(x) \leqslant x - \frac{1}{2}\ x^2}$$

□

***b)*** En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2\ \leqslant\ 2\ (u_n - u_{n+1})$.

*Démonstration.*

- Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rl} & f(x) \leqslant x - \frac{1}{2}\ x^2 \\ \text{donc} & \frac{1}{2}\ x^2 \leqslant x - f(x) \\ \text{ainsi} & x^2 \leqslant 2\ (x - f(x)) \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ x^2 \leqslant 2\ (x - f(x))}$$

- On a démontré en question ***2.*** que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.
On sait de plus, d'après la question ***1.***, que la suite $(u_n)$ est décroissante. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_0 = 1$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant l'inégalité précédente à $x = u_n \in [0,1]$, on obtient :

$$u_n^2 \leqslant 2\ (u_n - f(u_n))$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 \leqslant 2\ (u_n - u_{n+1}).}$$

□

*c)* Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge.

*Démonstration.*

- Démontrons tout d'abord que la série $\sum (u_n - u_{n+1})$ est convergente.
  Pour ce faire, on étudie la suite de ses sommes partielles $(S_n)$ :

$$S_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) \;=\; u_0 - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_0 - 0 = 1$$

$$\boxed{\text{La série } \sum (u_n - u_{n+1}) \text{ est convergente (de somme 1).}}$$

- – D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n^2 \leqslant 2\,(u_n - u_{n+1})$$

  – Or la série $\sum (u_n - u_{n+1})$ est convergente (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel).
  – On en déduit, par le critère de comparaison des séries à termes positifs que la série $\sum u_n^2$ est elle aussi convergente.

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n^2 \text{ est convergente.}}$$

□

## Exercice 4 (EDHEC 2014)

*1.* Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\, dt$ est définie pour tout réel $x$.

*Démonstration.*

- La fonction $t \mapsto \sqrt{t^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car est la composée $h_1 \circ g_1$ des fonctions :
  × $g_1 : t \mapsto 1+t^2$ continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et telle que $g(\mathbb{R}) \subset \,]0,+\infty[$.
  (pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1+t^2 \geqslant 1 > 0$)
  × $h_1 : t \mapsto \sqrt{t}$, continue sur $]0,+\infty[$.
- On en déduit que la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car est l'inverse de la fonction $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ continue sur $\mathbb{R}$ et qui `NE S'ANNULE PAS` sur $\mathbb{R}$ (pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1+t^2 \geqslant 1 > 0$).
- En particulier, pour tout $x \geqslant 0$ (resp. $x < 0$), $h$ est continue sur le segment $[x, 2x]$ (resp. $[2x, x]$).

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt \text{ est définie pour tout réel } x.}$$

□

On considère désormais la fonction $f$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\, dt$$

**2.** Établir que $f$ est impaire.

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\ dt$$

La fonction $t \mapsto -t$ est $C^1$ sur $[0,1]$.
On peut donc effectuer le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$u = -t$
(et donc $t = -u$)
$\hookrightarrow du = -dt$ et $dt = -du$
- $t = -x \Rightarrow u = -(-x) = x$
- $t = -2x \Rightarrow u = -(-2x) = 2x$

On a donc :

$$\int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\ dt = \int_{x}^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+(-u)^2}}(-du) = -\int_{x}^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\ du = -f(x)$$

$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } f \text{ est impaire.}}$ □

**3. a)** Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

*Démonstration.*
- La fonction $g$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. On note $G$ l'une d'elle. Par définition, $G$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}$ (puisqu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $g$ qui est continue sur $\mathbb{R}$).
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$f(x) = \int_{x}^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\ dt = [\ G(t)\ ]_{x}^{2x} = G(2x) - G(x)$$

Enfin, la fonction $x \mapsto G(2x)$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}$ par composée de fonctions $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$ □

**b)** Déterminer $f'(x)$, pour tout réel $x$, et en déduire que $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

*Démonstration.*
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= G'(2x) \times 2 - G'(x) \\ &= 2\ g(2x) - g(x) \\ &= 2\ \frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2\ \frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

- Raisonnons par équivalence.

$$\begin{array}{rcll} f'(x) > 0 & \Leftrightarrow & 2\, \dfrac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}} > \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \\ & \Leftrightarrow & 2\, \sqrt{1+x^2} > \sqrt{1+4x^2} & \textit{(car } \sqrt{1+x^2} > 0 \textit{ et } \sqrt{1+4x^2} > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 4\,(1+x^2) > 1+4x^2 & \textit{(par stricte croissance de } u \mapsto u^2 \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 4+4x^2 > 1+4x^2 & \\ & \Leftrightarrow & 3 > 0 & \end{array}$$

La dernière inégalité étant vérifiée, il en est de même de la première. Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

□

*4. a)* En utilisant la relation $t^2 \leqslant t^2+1 \leqslant t^2+2t+1$, valable pour tout $t$ positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)$$

*Démonstration.*

- Soient $t \geqslant 0$ et $x > 0$. Remarquons tout d'abord que : $t^2+2t+1 = (t+1)^2$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} & t^2 \ \leqslant \ t^2+1 \ \leqslant \ (t+1)^2 & & \textit{(d'après l'inégalité de l'énoncé)} \\ \text{donc} & \sqrt{t^2} \ \leqslant \ \sqrt{t^2+1} \ \leqslant \ \sqrt{(t+1)^2} & & \textit{(par croissance de la fonction racine)} \\ \textit{i.e.} & t \ \leqslant \ \sqrt{t^2+1} \ \leqslant \ t+1 & & \textit{(car } t \ \geqslant \ 0 \textit{ et } t+1 \ \geqslant \ 0\textit{)} \\ \text{et} & \dfrac{1}{t} \ \geqslant \ \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} \ \geqslant \ \dfrac{1}{t+1} & & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur } ]0,+\infty[\textit{)} \\ \text{ainsi} & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}\, dx \ \geqslant \ \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\, dx \ \geqslant \ \int_x^{2x} \frac{1}{t+1}\, dx & & \textit{(par croissance de l'intégrale les bornes } x \textit{ et } 2x \textit{ étant dans l'ordre croissant } (x \leqslant 2x)\textit{)} \end{array}$$

- Enfin :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t}\, dt \ = \ [\ \ln(|t|)\ ]_x^{2x} \ = \ \ln(|2x|) - \ln(|x|) \ = \ \ln(2x) - \ln(x) \ = \ \ln(2) + \cancel{\ln(x)} - \cancel{\ln(x)}$$

et :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t+1}\, dt \ = \ [\ \ln(|t+1|)\ ]_x^{2x} \ = \ \ln(|2x+1|) - \ln(|x+1|) \ = \ \ln(2x+1) - \ln(x+1)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \forall x > 0,\ \ln(2x+1) - \ln(x+1) \ \leqslant \ f(x) \ \leqslant \ \ln(2).}$$

□

***b)*** Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

*Démonstration.*
Soit $x > 0$. D'après la question précédente :

$$\ln(2x+1) - \ln(x+1) \ \leqslant\ f(x) \ \leqslant\ \ln(2)$$

- Remarquons tout d'abord que :

$$\ln(2x+1) \ = \ \ln\left(2x\ \left(1+\frac{1}{2x}\right)\right) \ = \ \ln(2x) + \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) \ = \ \ln(2) + \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$$

  De la même manière :

$$\ln(x+1) \ = \ \ln\left(x\ \left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \ = \ \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \ = \ \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x > 0,\ \ln(2x+1) - \ln(x+1) = \ln(2) + \cancel{\ln(x)} + \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) - \cancel{\ln(x)} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right).}$$

- D'autre part, par composition des limites :
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{2x}\right) \ = \ \ln(1) \ = \ 0.$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \ = \ \ln(1) \ = \ 0.$

  On en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(2x+1) - \ln(x+1) = \ln(2)$.
- On conclut alors, par le théorème d'encadrement, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln(2)$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(2)}$$

□

***c)*** Dresser le tableau de variation complet de $f$.

*Démonstration.*
D'après les questions précédentes :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $+$ | |
| Variations de $f$ | $-\ln(2)$ | $\nearrow$ | $\ln(2)$ |

La limite en $-\infty$ est obtenue par imparité de $f$.
En effet, à l'aide du changement de variable $X = -x$ (*i.e.* $x = -X$), on obtient :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \ = \ \lim_{X\to+\infty} f(-X) \ = \ \lim_{X\to+\infty} -f(X) \ = \ -\ln(2)$$

□

***d)*** Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

*Démonstration.*

- La fonction $f$ est :
  - $\times$ continue sur $]-\infty, +\infty[$,
  - $\times$ strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$.

  Elle réalise donc une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[)$. Or :

$$f(]-\infty, +\infty[) \ = \ ]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[ \ = \ ]-\ln(2), \ln(2)[$$

- Comme $0 \in \ ]-\ln(2), \ln(2)[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x \in \ ]-\infty, +\infty[$.
- Il suffit alors de remarquer que $x = 0$ est solution évidente de cette équation. En effet :

$$f(0) \ = \ \int_0^0 g(t) \ dt \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = 0 \text{ admet } x = 0 \text{ comme unique solution.}}$$

□

***5. a)*** Montrer que, pour tout réel $x$, on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord : $x^2 + 1 > x^2$.
  Ainsi, par stricte croissance de la fonction racine :

$$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$$

  On en déduit que :

$$x + \sqrt{x^2+1} > x + |x|$$

- Enfin : $x + |x| = \left\{ \begin{array}{ll} 2x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } -x < 0 \end{array} \right.$ ce qui permet d'affirmer que $x + |x| \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit, par transitivité que : } \forall x \in \mathbb{R}, \ x + \sqrt{x^2+1} > 0.}$$

□

***b)*** Déterminer la dérivée de la fonction $h$ qui, à tout réel $x$, associe $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

*Démonstration.*

- La fonction $h : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car est la composée $h_2 \circ g_2$ des fonctions :
  - $\times$ $g_2 : x \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ l'est (en procédant comme dans la question ***1.***), et telle que $g(\mathbb{R}) \subset \ ]0, +\infty[$ (car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{x^2+1} > 0$).
  - $\times$ $h_2 : x \mapsto \ln(x)$, dérivable sur $]0, +\infty[$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\, 2x\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \, \frac{2\sqrt{x^2+1}+2x}{2\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}} \, 2\, \frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}+x}}{2\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \ = \ g(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = g(x).}$$

□

*c)* En déduire une expression explicite de $f(x)$.

*Démonstration.*

- D'après la question précédente, la fonction $h$ est une primitive de $g$.
- On en déduit, que pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt \ = \ [\ h(t)\ ]_x^{2x} \ = \ h(2x) - h(x) \\
&= \ln\left(2x + \sqrt{(2x)^2+1}\right) - \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \\
&= \ln\left(\frac{2x+\sqrt{4x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ln\left(\frac{2x+\sqrt{4x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)}$$

□

***6.*** Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque $x$ est au voisinage de 0.

*a)* Établir que, pour tout réel $x$ strictement positif, on a : $x - f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}\, dt$.

*Démonstration.*
Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
x - f(x) &= \int_x^{2x} 1 \, dt - \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt \\
&= \int_x^{2x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) dt && \textit{(par linéarité de l'intégration)}
\end{aligned}$$

On remarque alors que pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} &= \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{1+t^2}-1\right)\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}{\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)} \\ &= \frac{\left((1+t^2)-1^2\right)}{\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)} = \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}\ dt}$$

□

***b)*** En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leqslant x - f(x) \leqslant \dfrac{7}{6}x^3$.

*Démonstration.*
Soient $x > 0$ et $t \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord :

| | | |
|---|---|---|
| | $1 + t^2 \geqslant 1$ | *(car $t^2 \geqslant 0$)* |
| donc | $\sqrt{1+t^2} \geqslant \sqrt{1} = 1$ | *(par croissance de la fonction racine)* |
| et | $\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right) \geqslant \left(\sqrt{t^2+1}+1\right)$ | *(car $\sqrt{t^2+1}+1 \geqslant 0$)* |
| ainsi | $\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right) \geqslant 2$ | *(car $\sqrt{t^2+1}+1 \geqslant 2$)* |
| d'où | $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)} \leqslant \dfrac{1}{2}$ | *(décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$)* |
| enfin | $\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)} \leqslant \dfrac{t^2}{2}$ | *(car $t^2 \geqslant 0$)* |

$$\boxed{\text{Dès lors : } 0 \leqslant \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)} \leqslant \frac{t^2}{2}.}$$

- Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x \leqslant 2x$ car $x > 0$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_x^{2x} 0\ dx & \leqslant & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}\ dx & \leqslant & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{2}\ dx \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & & f(x) - x & & \dfrac{1}{6}\left[\ t^3\ \right]_x^{2x} = \dfrac{1}{6}\left((2x)^3 - x^3\right) \end{array}$$

Enfin : $(2x)^3 - x^3 = 8x^3 - x^3 = 7x^3$.

$$\boxed{\forall x > 0,\ 0 \leqslant f(x) - x \leqslant \frac{7}{6}\ x^3}$$

**Remarque**

- Il est très important de remarquer dans cette question que les bornes de l'intégration sont bien ordonnées. Il faut noter que si $x \leqslant 0$ alors : $x \geqslant 2x$. Ainsi, l'intégration de l'inégalité membre à membre provoquera un changement des symboles d'inégalités.
- Dans la démonstration, on utilise le fait que : $\sqrt{t^2+1}+1 \geqslant 2$.
Si on minore de manière un peu plus brutale, on obtient simplement $\sqrt{t^2+1}+1 \geqslant 1$ et le membre droit diffère alors d'un facteur 2. En réalité, ce facteur importe peu pour la suite des questions et la majoration par $\dfrac{7}{3}x^3$ n'est pas pénalisée. □

***c)*** Conclure que : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} x$.

*Démonstration.*
Soit $x > 0$.

- D'après la question précédente : $0 \leqslant f(x) - x \leqslant \dfrac{7}{6}\, x^3$.
On en déduit que : $x \ \leqslant\ f(x)\ \leqslant\ x + \dfrac{7}{6}\, x^3$.
Et ainsi, comme $x > 0$ :
$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{x}{x} & \leqslant & \dfrac{f(x)}{x} & \leqslant & \dfrac{x}{x} + \dfrac{7}{6}\,\dfrac{x^3}{x} \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 1 & & & & 1 + \dfrac{7}{6}\, x^2 \end{array}$$
- Or :
  × $1 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$
  × $1 + \dfrac{7}{6}\, x^2 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$

  Ainsi, par le théorème d'encadrement, on conclut que : $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$.

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} x}$$

**Remarque**
Afin de pouvoir utiliser l'inégalité précédente, on doit faire l'hypothèse : $x > 0$.
C'est ce qui explique que l'on trouve un équivalent en $0^+$ et non pas en 0 directement. □

***d)*** Montrer que l'on a aussi : $f(x) \underset{x\to 0^-}{\sim} x$.

*Démonstration.*
Soit $x < 0$. On effectue le changement de variable $X = -x$ (*i.e.* $x = -X$).
Ainsi, on a : $x \to 0^- \ \Leftrightarrow\ X \to 0^+$.
D'où :
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{X\to 0^+} \frac{f(-X)}{-X} = \lim_{X\to 0^+} \frac{-f(X)}{-X} = \lim_{X\to 0^+} \frac{f(X)}{X} = 1$$
(la deuxième égalité est obtenue car $f$ est impaire)

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0^-}{\sim} x}$$

□