# DS2 (version A)

## I. Exercice 1

### Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2

- On note $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
- On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

*1.* Calculer $AFA$, $AGA$, $AHA$.

*2.* Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que $(F, G, H)$ est une base de $\mathcal{S}_2$.
Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_2$.

*3.* ***a)*** Montrer que : $\forall S \in \mathcal{S}_2,\ ASA \in \mathcal{S}_2$.

***b)*** Déterminer le rang de la famille $(AFA, AGA, AHA)$.

### Partie 2 : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3

On note : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$, $\quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

*1.* On note de plus :

$$\begin{aligned} E_{-4} &= \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ MX = -4X\} \\ E_1 &= \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ MX = X\} \\ E_{16} &= \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ MX = 16X\} \end{aligned}$$

Montrer que chacun de ces ensembles est un espace vectoriel. Donner une base et la dimension de chacun d'eux.

*2.* On note $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
Montrer que $P$ est inversible et calculer $P^{-1}$.

*3.* Montrer que : $M = PDP^{-1}$.

*4.* Vérifier que $(D + 4I)(D - I)(D - 16I)$ est la matrice nulle.

*5.* En déduire : $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.

# II. Exercice 2

Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

*1.* Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de $u_0, u_1$ et $u_2$.

*2.* ***a)*** Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n \geqslant 2$.

***b)*** Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$ puis en déduire les variations de la suite $(u_n)$.

***c)*** Établir que, pour tout réel $x$ strictement supérieur à $-1$, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$.

***d)*** En déduire, pour tout entier naturel $n$, un majorant de $\ln(u_n)$.

*3.* En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite $(u_n)$ converge vers un réel $\ell$, élément de $\left[2, \mathrm{e}^2\right]$.

*4.* On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

***a)*** Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

***b)*** Montrer que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on a $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

***c)*** Vérifier, en utilisant le résultat de la question 3a), que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}$.

***d)*** Déduire de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.

***e)*** Justifier que, pour tout réel $x$, on a $1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant x$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{\ell}{2^n}$.
Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

*5.* Écrire en **Scilab** une fonction `SuiteU` prenant en paramètre un entier `n` et calculant en sortie le terme $u_{\mathtt{n}}$.

*6.* ***a)*** Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{2^n}$.
Déterminer un entier $N$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-3}$.

***b)*** Déduire de cet encadrement un programme **Scilab** permettant de déterminer une valeur approchée de $\ell$ à $10^{-3}$ près. *On pourra utiliser la fonction* `SuiteU`.

# III. Exercice 3

Soit $a$ un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou $26$) qui contient donc deux rois rouges, et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

## Partie I : Premier protocole

Les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon alétoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. On note $X$ la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $\mathbb{E}(X)$ son espérance.

*1.* Montrer : $\forall k \in \{1, ..., 2n-1\}, \mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$

*2.* Montrer : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{2n+1}{3}$.
On rappelle que pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, on a : $\sum\limits_{k=1}^{p} k^2 = \dfrac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.

*3.* Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne $a$ francs losqu'il obtient le premier roi rouge. On note $G_1$ la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte, $G_1$ est égale à $a - k$.
Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $G_1$.

## Partie II : Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum $n$ cartes. Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne $a$ francs losqu'il obtient le premier roi rouge.On note $G_2$ la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ème}}$ carte découverte ($k \leqslant n$), $G_2$ est égale à $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des $n$ premiers tirages, alors $G_2$ est égale à $-n$.

*1.* Pour tout entier $k \in \{1, ..., n\}$, déterminer $\mathbb{P}([G_2 = a - k])$.

*2.* Vérifier : $\mathbb{P}([G_2 = -n]) = \dfrac{n-1}{2(2n-1)}$.

*3.* Montrer : $\mathbb{E}(G_2) = \dfrac{3(3n-1)a - \left(7n^2 - 1\right)}{6(2n-1)}$.

## Partie III : Comparaison des deux protocoles

On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$). Déterminer, selon les valeurs de $a$, le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.

## IV. Problème

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine $O$.
Au départ, le mobile est à l'origine.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse $k$ à l'instant $n$, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité $p$ $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.
Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on note $X_n$ l'abscisse de ce point à l'instant $n$ et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ $X_n$ est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Par ailleurs, on note $T$ l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.
On admet que $T$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

***1.*** ***a)*** Pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $[T = k]$ en fonction d'évènements mettant en jeu certaines des variables $X_i$.

***b)*** Donner la loi de $X_1$.

***c)*** En déduire $\mathbb{P}([T = k])$ pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de $T$.

***2.*** ***a)*** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

***b)*** Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'évènements $([X_{n-1} = k])_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ pour montrer que : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$.

***3.*** ***a)*** Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1, 2, \dots n+1\},\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p\, \mathbb{P}([X_n = k-1])$.

***b)*** En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{0, 1, 2 \dots, n-1\},\ \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k (1-p)$.
En déduire également la valeur de $\mathbb{P}([X_n = n])$.
Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

***c)*** Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$.

***4.*** Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.
On rappelle que `grand(1,1,'uin',0,2)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par $X_n$ pour une valeur de $n$ entrée par l'utilisateur.

```
n = input(' Entrez un entier naturel n : ')
X = 0
for k = 1:n
    u = grand(1,1,'uin',0,2)
    if u == 2 then
        X = ...........
    else
        X = ...........
    end
end
disp(X)
```

***5.*** ***a)*** Montrer que : $\forall n \geqslant 2,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1} = \frac{(n-1)\, p^n - n\, p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

***b)*** En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{p(1-p^n)}{1-p}$.

***6.*** ***a)*** Montrer, en utilisant la question 3a), que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) = p\left(\mathbb{E}\left(X_n^2\right) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1\right)$.

***b)*** Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + (2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$.

Montrer que $u_{n+1} = p\ u_n + \dfrac{p(1+p)}{1-p}$.

***c)*** En déduire l'expression de $u_n$, puis celle de $\mathbb{E}\left(X_n^2\right)$ en fonction de $p$ et $n$.

***d)*** Montrer enfin que : $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{p}{(1-p)^2}\left(1-(2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1}\right)$.

***7.*** Dans cette question, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.

En s'inspirant du programme de la question ***4.***, écrire en **Scilab** une fonction `TrajectoireX` prenant en paramètre un entier `n` et calculant en sortie un vecteur `T` contenant les `n` premières abscisses du mobile.