
DS2 (version A) /154

I. Exercice 1 (EML 2010) /32

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 /15

- On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
 - On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 - On note \mathcal{S}_2 l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.
1. Calculer AFA , AGA , AHA .
 - **3 pts (1 par calcul)**
 2. Montrer que \mathcal{S}_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de \mathcal{S}_2 . Déterminer la dimension de \mathcal{S}_2 .
 - **2 pts : écriture de \mathcal{S}_2 sous forme de Vect(...)**
 - **1 pt : famille génératrice**
 - **1 pt : famille libre**
 - **1 pt : conclusion**
 3. a) Montrer que : $\forall S \in \mathcal{S}_2, ASA \in \mathcal{S}_2$.
 - **2 pts : si la justification A et S sont symétriques donnée (1 pt si justification absente et 0 si ${}^t(ASA) = {}^tA{}^tS{}^tA$)**
 - b) Déterminer le rang de la famille (AFA, AGA, AHA) .
 - **3 pts : qq soit la méthode**
 - × **expression sur la base (F, G, H) (1 pour expression, 1 pour opérations sur le rang, 1 pour conclusion)**
 - × **la même mais directement avec les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$**
 - × **liberté de la famille (2 pour la liberté et 1 pour conclusion)**

Partie 2 : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3 /14

On note : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

1. On note de plus :

$$E_{-4} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / MX = -4X\}$$

$$E_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / MX = X\}$$

$$E_{16} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / MX = 16X\}$$

Montrer que chacun de ces ensembles est un espace vectoriel. Donner une base et la dimension de chacun d'eux.

- 1 pt : écriture du système
- 1 pt : résolution du système
- 1 pt : écriture sous forme de sev engendré
- 1 pt : famille génératrice + libre
- 1 pt : dimension
- 2 pts : de même pour E_1
- 2 pts : de même pour E_{16}

2. On note $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .

- 3 pts (1 pt accordé si justification inversibilité donnée même si la réduite triangulaire est fause, -1pt si argument sur les coeff diagonaux d'une matrice non triangulaire)

3. Montrer que : $M = PDP^{-1}$.

- 2 pts

4. Vérifier que $(D + 4I)(D - I)(D - 16I)$ est la matrice nulle.

- 1 pt

5. En déduire : $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.

- 2 pts : $D^3 - 13D^2 - 52D + 64I$ (dont 1 car I et D commutent !)
- 1 pt : puissances de M en fonction de D
- 1 pt : multiplication matricielle

II. Exercice 2 (EDHEC 2010) /38

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2 .

– 3 pts (1 pour chaque, 0 si donné sous forme non simplifiée)

2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 2$.

– 1 pt : découpage de u_n

– 1 pt : $1 + \frac{1}{2^k} \geq 1$

b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n) .

– 1 pt : u_{n+1} en fonction de u_n

– 1 pt : $u_n \neq 0$

– 1 pt : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ et donc $u_{n+1} \geq u_n$ (0 si justification $u_n > 0$ oubliée)

c) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1 , on a : $\ln(1+x) \leq x$.

– 1 pt : concavité

– 1 pt : conclusion

d) En déduire, pour tout entier naturel n , un majorant de $\ln(u_n)$.

– 1 pt : propriété de \ln

– 1 pt : $\frac{1}{2^k} > -1$

– 1 pt : conclusion

3. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ , élément de $[2, e^2]$.

– 1 pt : majoration

– 1 pt : théorème de convergence monotone

– 1 pt : encadrement de ℓ

4. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

– 1 pt : continuité \ln

– 1 pt : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$

b) Montrer que, pour tout n de \mathbb{N} , on a $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

– 1 pt

c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question 3a), que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ln \left(\frac{\ell}{u_n} \right) \leq \frac{1}{2^n}$.

- 1 pt : minoration
- 2 pts : majoration

d) Dédurre de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \ell \left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}} \right)$.

- 1 pt : justification
- 1 pt : $\ell > 0$

e) Justifier que, pour tout réel x , on a $1 - e^{-x} \leq x$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$.
Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

- 1 pt : inégalité $1 - e^{-x} \geq x$
- 1 pt : application inégalité de convexité
- 3 pts : critère de comparaison des SATP (encadrement, convergence de la série géométrique, citation du critère)

5. Écrire en **Scilab** une fonction `SuiteU` prenant en paramètre un entier `n` et calculant en sortie le terme u_n .

- 3 pts : fonction, initialisation, boucle for

6. a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{e^2}{2^n}$.

Déterminer un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq 10^{-3}$.

- 1 pt : $\ell - u_n \leq \frac{e^2}{2^n}$
- 1 pt : valeur absolue
- 1 pt : valeur de N
- 1 pt : justification

b) Dédurre de cet encadrement un programme **Scilab** permettant de déterminer une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près. On pourra utiliser la fonction `SuiteU`.

- 2 pts : N, u

III. Exercice 3 (EML 2000) /22

Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges, et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

Partie I : Premier protocole /9

Les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $\mathbb{E}(X)$ son espérance.

1. Montrer : $\forall k \in \{1, \dots, 2n - 1\}, \mathbb{P}([X = k]) = \frac{2n - k}{n(2n - 1)}$

- 2 pts : Card($[X = k]$)
- 1 pt : Card(Ω')

2. Montrer : $\mathbb{E}(X) = \frac{2n + 1}{3}$.

On rappelle que pour tout entier naturel $p \geq 1$, on a : $\sum_{k=1}^p k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.

- 1 pt : support
- 1 pt : existence espérance

- 3 pts : calcul (1 point pour $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{2n-1} k\mathbb{P}([X = k])$, 1 point pour $\sum_{k=1}^{2n-1} k / \sum_{k=1}^{2n-1} k^2$, 1 point pour le reste)

3. Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs lorsqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ième}}$ carte découverte, G_1 est égale à $a - k$. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire G_1 .

- 1 pt : lien G_1 et X
- 1 pt : linéarité espérance

Partie II : Deuxième protocole /9

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes. Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs lorsqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ème}}$ carte découverte ($k \leq n$), G_2 est égale à $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

1. Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer $\mathbb{P}([G_2 = a - k])$.

- 1 pt

2. Vérifier : $\mathbb{P}([G_2 = -n]) = \frac{n - 1}{2(2n - 1)}$.

- 1 pt : support
- 1 pt : SCE associé à G_2
- 2 pts : calcul

3. Montrer : $\mathbb{E}(G_2) = \frac{3(3n-1)a - (7n^2-1)}{6(2n-1)}$.

- 1 pt : existence espérance
- 3 pts : calcul

Partie III : Comparaison des deux protocoles /3

On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$). Déterminer, selon les valeurs de a , le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.

- 3 pts (dont 1 pour l'application de $n = 16$)

IV. Problème (EDHEC 2005) /62

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O .

Au départ, le mobile est à l'origine.

Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n , alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p ($0 < p < 1$) ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.

Pour tout n de \mathbb{N} , on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.

On admet que, pour tout n de \mathbb{N} X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.

On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. a) Pour tout k de \mathbb{N}^* , exprimer l'évènement $[T = k]$ en fonction d'évènements mettant en jeu certaines des variables X_i .

- 3 pts (2 pts pour l'intersection même sans justification, 1 pt pour le cas $[T = 1]$)

b) Donner la loi de X_1 .

- 1 pt : support
- 1 pt : loi

c) En déduire $\mathbb{P}([T = k])$ pour tout k de \mathbb{N}^* , puis reconnaître la loi de T .

- 1 pt : écriture correcte FPC
- 1 pt : valeur des proba conditionnelles (justifié)
- 1 pt : résultat
- 1 pt : loi géométrique

2. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

- 1 pt : initialisation
- 2 pts : hérédité (1pt pour le cas $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et 1 pt pour le cas $k = 0$)

b) Pour tout n de \mathbb{N}^* , utiliser le système complet d'événements $([X_{n-1} = k])_{0 \leq k \leq n-1}$ pour montrer que : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$.

– 1 pt : FPT

– 1 pt : $\mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \neq 0$ (pour y avoir pensé)

– 1 pt : $\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) = 1$

3. a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n+1\}, \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p \mathbb{P}([X_n = k-1])$.

– 2 pts : égalité entre événements (1 pt si non justifié)

– 1 pt : proba conditionnelle

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k (1-p)$.

En déduire également la valeur de $\mathbb{P}([X_n = n])$.

Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

– 1 pt : récurrence bien posée

– 1 pt : initialisation

– 3 pts : hérédité (dont 1 pour le cas $k = 0$)

– 2 pts : récurrence immédiate

– 1 pt : explication

c) Vérifier que $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$.

– 1 pt : séparer le cas $k = n$

– 1 pt : $p \neq 1$

– 1 pt : formule de la somme géométrique

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \frac{1}{3}$.

On rappelle que `grand(1,1,'uin',0,2)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$.

Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
1  n = input(' Entrez un entier naturel n : ')
2  X = 0
3  for k = 1:n
4      u = grand(1,1,'uin',0,2)
5      if u == 2 then
6          X = .....
7      else
8          X = .....
9      end
10 end
11 disp(X)
```

– 2 pts (1 par ligne à remplir, même sans justification)

5. a) Montrer que : $\forall n \geq 2, \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

– 1 pt : initialisation

– 2 pts : hérédité

b) En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$.

– 1 pt : existence espérance

– 1 pt : découpage de la somme

– 2 pts : calcul

6. a) Montrer, en utilisant la question 3a), que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_{n+1}^2) = p(\mathbb{E}(X_n^2) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1)$.

– 1 pt : existence espérance

– 1 pt : théorème de transfert

– 2 pts : calcul

b) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \mathbb{E}(X_n^2) + (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p}$.

Montrer que $u_{n+1} = pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p}$.

– 1 pt : utilisation question précédente

– 2 pts : calcul

c) En déduire l'expression de u_n , puis celle de $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de p et n .

– 1 pt : point fixe

– 1 pt : suite géométrique

– 1 pt : u_0

– 1 pt : expression de u_n

– 2 pts : expression $\mathbb{E}(X_n^2)$

d) Montrer enfin que : $\mathbb{V}(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2} (1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1})$.

– 1 pt : existence variance

– 2 pts : calcul (dont 1 pt pour la formule de la variance)

7. Dans cette question, on prend $p = \frac{1}{3}$.

a) En s'inspirant du programme de la question 4., écrire en **Scilab** une fonction **TrajectoireX** prenant en paramètre un entier **n** et calculant en sortie un vecteur **T** contenant les **n** premières abscisses du mobile.

– 3 pts : fonction, initialisation, modification vecteur

b) On considère le programme **Scilab** suivant :

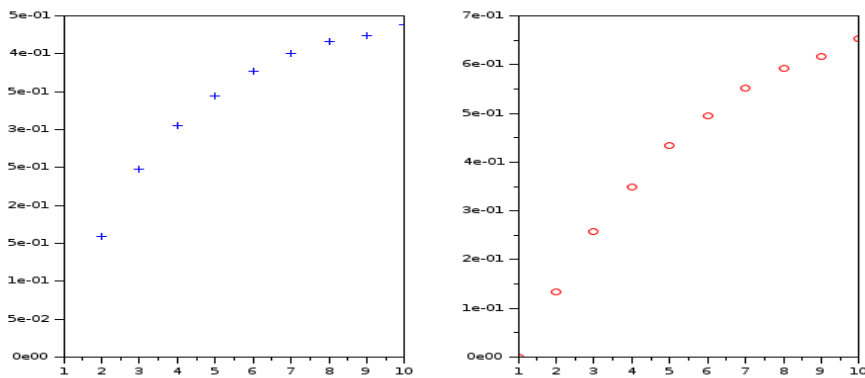
```
1  n = input('Entrez un entier n : ')
2  N = 1000
3  T = zeros(N,n)
4  for i = 1:N
5      T(i,:) = TrajectoireX(n)
6  end
7  E = zeros(1,n)
8  V = zeros(1,n)
9  for k = 1:n
10     E(k) = mean(T(:,1:k))
11     V(k) = variance(T(:,1:k))
12 end
13 subplot(1,2,1), plot(E,'+')
14 subplot(1,2,2), plot(V,'or')
```

Que représentent les vecteurs **E** et **V** ?

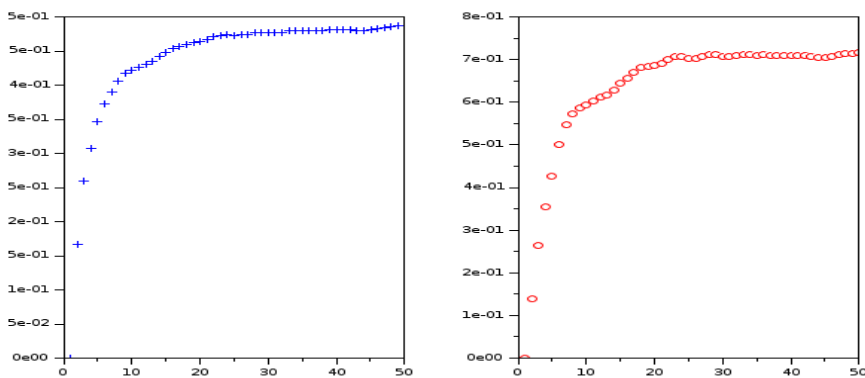
– 2 pts : 1 pt pour **E**, 1 pt pour **V**

c) Le programme précédent nous permet d'obtenir les graphiques suivants pour différentes valeurs de n :

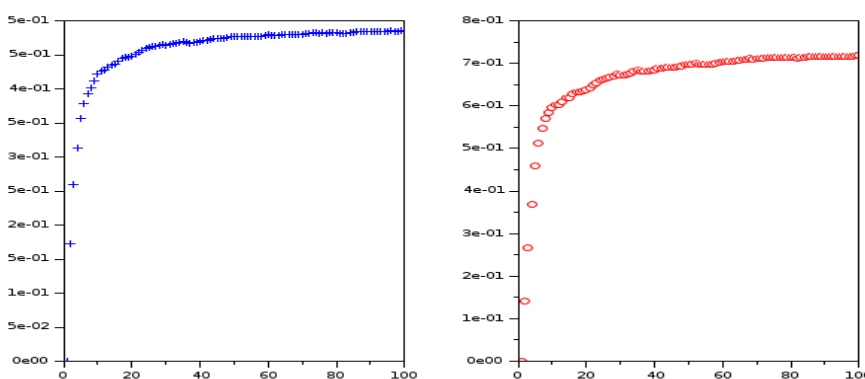
$n=10$



$n=50$



$n=100$



Expliquer ces graphiques à l'aide des questions 5. et 6..

- 3 pts : dont 1 pour la loi faible des grands nombres et 1 pour la limite quand n tend vers $+\infty$