DS2 (version A)

I. Exercice 1 (EML 2010)

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2

- On note $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
- On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Calculer AFA, AGA, AHA.

Démonstration.

- $AFA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
- $AGA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$
- $AHA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

$$\boxed{AFA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\ AGA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \text{ et } AHA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}}$$

□

2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de $\mathcal{S}_2$.
Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_2$.

Démonstration.

- Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Alors il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} M \in \mathcal{S}_2 & \Leftrightarrow & {}^tM = M \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & a \\ c & = & b \\ b & = & c \\ d & = & d \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & b = c \end{array}$$

- On obtient alors l'écriture de $\mathcal{S}_2$ suivante :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}_2 & = & \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ {}^tM = M\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ b = c \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \ / \ (a, b, d) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ & = & \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ / \ (a, b, d) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ & = & \left\{ a \cdot F + b \cdot G + d \cdot H \ / \ (a, b, d) \in \mathbb{R}^3 \right\} \ = \ \mathrm{Vect}\,(F, G, H) \end{array}$$

$$\boxed{\mathcal{S}_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \text{ donc un espace vectoriel.}}$$

- La famille (F, G, H) :
  - × engendre $\mathcal{S}_2$, d'après le point précédent,
  - × est libre dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
    Démontrons-le.
    Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
    Supposons que $\lambda_1 \cdot F + \lambda_2 \cdot G + \lambda_3 \cdot H = 0$. Ainsi :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui équivaut au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc la famille (F, G, H) est libre.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (F, G, H) \text{ est une base de } \mathcal{S}_2.}$$

$$\boxed{\text{Enfin, comme } (F, G, H) \text{ est constituée de 3 vecteurs, } \dim(\mathcal{S}_2) = 3.}$$

$\square$

3. a) Montrer que : $\forall S \in \mathcal{S}_2, \ ASA \in \mathcal{S}_2$.

Démonstration.
Soit $S \in \mathcal{S}_2$.

$$\begin{array}{rcll} {}^t(ASA) & = & {}^t((AS)A) & \\ & = & {}^tA \ {}^t(AS) & \\ & = & {}^tA \ {}^tS \ {}^tA & \\ & = & ASA & \quad \textit{(car } {}^tA = A \textit{ et } {}^tS = S\textit{)} \end{array}$$

Donc $ASA \in \mathcal{S}_2$.

$$\boxed{\forall S \in \mathcal{S}_2, \ ASA \in \mathcal{S}_2}$$

Remarque
On applique ici la formule suivante :

$$\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2, \ {}^t(AB) = {}^tB \, {}^tA$$

Il faut bien faire attention à l'ordre d'apparition des matrices dans cette formule : ${}^t(AB) \cancel{=} {}^tA {}^tB$.

$\square$

b) Déterminer le rang de la famille (AFA, AGA, AHA).

Démonstration.

- Notons tout d'abord que :
  - × $AFA = 4H$,
  - × $AGA = 4G + 12H$,
  - × $AHA = 4F + 6G + 9H$.

- Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \text{rg}(AFA, AGA, AHA) & = & \text{rg}(4H, 4G+12H, 4F+6G+9H) \\ & = & \text{rg}(H, G+3H, 4F+6G+9H) \\ & = & \text{rg}(H, (G+\cancel{3H})-\cancel{3H}, (4F+6G+\cancel{9H})-\cancel{9H}) \\ & = & \text{rg}(H, G, 4F+6G) \\ & = & \text{rg}(H, G, (4F+\cancel{6G})-\cancel{6G}) \\ & = & \text{rg}(H, G, 4F) \\ & = & \text{rg}(H, G, F) \\ & = & \text{rg}(F, G, H) \end{array}$$

  Or la famille (F, G, H) est libre d'après la question *2.*.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{rg}(F, G, H) = 3 \ \text{ et } \ \text{rg}(AFA, AGA, AHA) = 3.}$$

Remarque

- Rappelons que : $\text{rg}(F, G, H) = \dim(\text{Vect}(F, G, H))$.
  Par définition, la famille (F, G, H) engendre $\text{Vect}(F, G, H)$.
  On cite dans la démonstration l'argument de liberté.
  Ceci permet de démontrer que (F, G, H) est une base de $\text{Vect}(F, G, H)$ et donc que :

$$\dim(\text{Vect}(F, G, H)) = 3$$

- On peut rédiger cette question différemment.
  Un première possibilité est de rédiegr directement avec les matrices.

$$\begin{array}{rll} & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\right) & \\ = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\right) & \textit{(on met à jour la } 1^{\text{ère}} \textit{ et } 2^{\text{ème}} \textit{ matrice en les multipliant par } \frac{1}{4}\textit{)} \\ = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\right) & \textit{(on met à jour la } 2^{\text{ème}} \textit{ matrice en lui retirant } 3 \textit{ fois la } 1^{\text{ère}}\textit{)} \\ = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\right) & \textit{(on met à jour la } 3^{\text{ème}} \textit{ matrice en lui retirant } 9 \textit{ fois la } 1^{\text{ère}}\textit{)} \\ = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) & \textit{(on met à jour la } 3^{\text{ème}} \textit{ matrice en lui retirant } 6 \textit{ fois la } 1^{\text{ère}}\textit{)} \\ = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) & \textit{(on met à jour la } 3^{\text{ème}} \textit{ matrice en la multipliant par } \frac{1}{4}\textit{)} \\ = & \text{rg}(F, G, H) = 3 & \end{array}$$

- On pouvait aussi démontrer directement que la famille (AFA, AGA, AHA) est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
  Supposons que $\lambda_1 \cdot AFA + \lambda_2 \cdot AGA + \lambda_3 \cdot AHA = 0$. Or :

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 \cdot AFA + \lambda_2 \cdot AGA + \lambda_3 \cdot AHA & = & \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 4\lambda_3 & 4\lambda_2 + 6\lambda_3 \\ 4\lambda_2 + 6\lambda_3 & 4\lambda_1 + 12\lambda_2 + 9\lambda_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ainsi, la première égalité équivaut au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4\lambda_1 & + & 12\lambda_2 & + & 9\lambda_3 & = & 0 \\ & & 4\lambda_2 & + & 6\lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 4\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right.$$

(par remontées successives) □

Partie 2 : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3

On note : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$, $\quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

1. On note de plus :

$$\begin{array}{rcl} E_{-4} & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ MX = -4X\} \\ E_1 & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ MX = X\} \\ E_{16} & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ MX = 16X\} \end{array}$$

Montrer que chacun de ces ensembles est un espace vectoriel. Donner une base et la dimension de chacun d'eux.

Démonstration.
Cas de E_{-4} :

- Montrons que E_{-4} est un espace vectoriel.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{rcl} X \in E_{-4} & \Longleftrightarrow & MX = -4X \\ & \Longleftrightarrow & (M+4I)X = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 4 & 12 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & & & + & 4z & = & 0 \\ & & 8y & + & 6z & = & 0 \\ 4x & + & 12y & + & 13z & = & 0 \end{array}\right. \\ & \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2}{\overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & z & = & 0 \\ & & 4y & + & 3z & = & 0 \\ 4x & + & 12y & + & 13z & = & 0 \end{array}\right. \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & z & = & 0 \\ & & 4y & + & 3z & = & 0 \\ & & 12y & + & 9z & = & 0 \end{array}\right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & z & = & 0 \\ & & 4y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -z \\ 4y & = & -3z \end{array}\right. \end{array}$$

Finalement on obtient l'expression de E_{-4} suivante :

$$\begin{aligned}
E_{-4} &= \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ MX = 4X\} \\
&= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ x = -z \ \text{ et } \ y = -\frac{3}{4} z\} \\
&= \{\begin{pmatrix} -z \\ -\frac{3}{4}z \\ z \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En particulier, } E_{-4} \text{ est un espace vectoriel.}}$$

- Déterminons une base de E_{-4}.

  On sait que la famille $\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$:

  × engendre E_{-4} d'après le point précédent,

  × est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car elle est constituée d'un unique vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_{-4}.}$$

$$\boxed{\text{Comme } \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right) \text{ est constituée d'un vecteur, } \dim(E_{-4}) = 1.}$$

Cas de E_1 :

- Montrons que E_1 est un espace vectoriel.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_1 & \Longleftrightarrow & MX = X \\
& \Longleftrightarrow & (M - I)X = 0 \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x & & & + & 4z & = & 0 \\ & & 3y & + & 6z & = & 0 \\ 4x & + & 12y & + & 8z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3}{\overset{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x & & & + & 4z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x & & & + & 4z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \\ & & 3y & + & 6z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x & & & + & 4z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & = & 4z \\ & & y & = & -2z \end{array} \right.
\end{array}$$

  Finalement on obtient l'expression de E_1 suivante :

$$\begin{array}{rcl}
E_1 & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ MX = X\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ x = 4z \text{ et } y = -2z \right\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} 4z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R} \right\} \\
& = & \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{En particulier, } E_1 \text{ est un espace vectoriel.}}$$

- Déterminons une base de E_1.

  On sait que la famille $\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$:

  × engendre E_1 d'après le point précédent,

  × est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car elle est constituée d'un unique vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_1.}$$

$$\boxed{\text{Comme } \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est constituée d'un vecteur, } \dim(E_1) = 1}$$

Cas de E_{16} :

- Montrons que E_{16} est un espace vectoriel.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_{16} & \Longleftrightarrow & MX = 16X \\
& \Longleftrightarrow & (M - 16\ I)X = 0 \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -16 & 0 & 4 \\ 0 & -12 & 6 \\ 4 & 12 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -16x & & & + & 4z & = & 0 \\ & - & 12y & + & 6z & = & 0 \\ 4x & + & 12y & - & 7z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{\substack{L_1 \leftarrow -\frac{1}{4}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{6}L_2}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 4x & & & - & z & = & 0 \\ & & 2y & - & z & = & 0 \\ 4x & + & 12y & - & 7z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 4x & & - & z & = 0 \\ & 2y & - & z & = 0 \\ & 12y & - & 6z & = 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 4x & & - & z & = 0 \\ & 2y & - & z & = 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} 4x & = & z \\ 2y & = & z \end{array} \right.
\end{array}$$

Finalement on obtient l'expression de E_{16} suivante :

$$\begin{aligned} E_{16} &= \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ MX = 16X\} \\ &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ x = \frac{1}{4}z \ \text{ et } \ y = \frac{1}{2}z\} \\ &= \{\begin{pmatrix} \frac{1}{4}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En particulier, } E_{16} \text{ est un espace vectoriel.}}$$

- Déterminons une base de E_{16}.

  On sait que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$:

  × engendre E_{16} d'après le point précédent,

  × est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car elle est constituée d'un unique vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_{16}.}$$

$$\boxed{\text{Comme } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \text{ est constituée d'un vecteur, } \dim(E_{16}) = 1}$$

□

2. On note $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

Démonstration.

On applique la méthode de Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 4L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & -20 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{\ L_3 \leftarrow 4L_3 + L_2\right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & -20 & 5 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \right.$$

La matrice $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & -20 & 5 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls.

Elle est donc inversible. Ainsi, P est inversible.

On effectue les opérations $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow 25L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 5L_2 - L_3 \end{array}\right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 100 & 100 & 0 \\ 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 24 & -4 & -4 \\ -16 & 16 & -4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_2 \end{array}\right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 25 & 25 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2\right.$. On obtien alors :

$$\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}.}$$

□

3. Montrer que : $M = PDP^{-1}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= \frac{1}{25}P\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & -12 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \\ 16 & 64 & 64 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0 & 100 & 150 \\ 100 & 300 & 225 \end{pmatrix} \\ &= M \end{aligned}$$

$$\boxed{M = PDP^{-1}.}$$

Remarque

- Ce type de questions est l'occasion de vérifier vos précédents calculs : si vous n'obtenez pas le résultat attendu c'est que vous avez certainement commis une erreur dans le calcul de P^{-1}.
- L'énoncé demande de faire le produit de 3 matrices. Le résultat attendu étant énoncé, il suffit de faire le premier produit et d'affirmer que le second donne le résultat souhaité. Évidemment, pour agir ainsi, il faut être sûr de vos précédents. Sinon, le correcteur jugera que c'est une tentative d'arnaque, ce qui est peu apprécié. □

4. Vérifier que $(D+4I)(D-I)(D-16I)$ est la matrice nulle.

Démonstration.

$$\begin{aligned}(D+4I)(D-I)(D-16I) &= (D+4I)\begin{pmatrix}-5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-20 & 0 & 0\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\boxed{(D+4I)(D-I)(D-16I) = 0}$$

□

5. En déduire : $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.

Démonstration.

- Les matrices I et D commutent. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}(D+4I)(D-I)(D-16I) &= (D+4I)(D^2-17D+16I)\\ &= D^3 - 13D^2 - 52D + 64I\end{aligned}$$

- On en déduit, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} & D^3 - 13D^2 - 52D + 64I = 0\\ \textit{i.e.}\quad & D^3 = 13D^2 + 52D - 64I\end{aligned}$$

- Or, on sait que $M = PDP^{-1}$. Donc :

$$\begin{aligned} M^2 &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^2P^{-1}\\ \text{de même}\quad M^3 &= M^2M = (PD^2P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^3P^{-1}\end{aligned}$$

- On obtient alors :

$$\begin{aligned}PD^3P^{-1} &= P(13D^2+52D-64I)P^{-1}\\ &= 13PD^2P^{-1} + 52PDP^{-1} - 64PP^{-1}\\ &= 13M^2 + 52M - 64I\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } M^3 = 13M^2 + 52M + 64.}$$

□

II. Exercice 2 `EDHEC 2010`

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
u_0 &= \prod_{k=0}^{0}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = 1 + \frac{1}{2^0} = 1 + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2 \\
u_1 &= \prod_{k=0}^{1}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \left(1+\frac{1}{2^0}\right)\left(1+\frac{1}{2^1}\right) = 2\left(1+\frac{1}{2}\right) = \cancel{2}\frac{3}{\cancel{2}} = 3 \\
u_2 &= \prod_{k=0}^{2}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \left(1+\frac{1}{2^0}\right)\left(1+\frac{1}{2^1}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right) = 3\left(1+\frac{1}{4}\right) = 3\frac{5}{4} = \frac{15}{4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{u_0 = 2,\ u_1 = 3 \text{ et } u_2 = \frac{15}{4}.}$$

□

2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 2$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \left(1+\frac{1}{2^0}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = 2\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$$

Or, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $1 + \frac{1}{2^k} \geqslant 1$. Donc : $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \geqslant 1$. Donc :

$$u_n = 2\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \geqslant 2 \times 1 = 2$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 2.}$$

Remarque
On pouvait aussi résoudre cette question grâce à une récurrence.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \geqslant 2$.

- **Initialisation** :
  $u_0 = 2 \geqslant 2$.
  Donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \geqslant 2$).

  $$u_{n+1} = \prod_{k=0}^{n+1}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \times \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) = u_n \times \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

  Par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant 2$. Comme $1 + \frac{1}{2^{n+1}} \geqslant 1$, on en déduit :

  $$u_{n+1} \geqslant 2\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) \geqslant 2 \times 1 = 2$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$.

□

b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Remarquons tout d'abord que :

$$u_{n+1} = \prod_{k=0}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) u_n}$$

- Étudions les variations de la suite (u_n).
  D'après la question ***2.a)***, $u_n \geqslant 2$. Donc, en particulier, $u_n \neq 0$.

  On peut alors écrire :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cancel{u_n}}{\cancel{u_n}} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \geqslant 1$$

  Enfin, comme $u_n > 0$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \ \Leftrightarrow\ u_{n+1} \geqslant u_n$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

□

c) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$.

Démonstration.

- Notons $f : x \mapsto \ln(1+x)$.
  La fonction f est C^2 sur $]-1, +\infty[$ comme composée $h \circ g$ de :
  × $h : x \mapsto 1 + x$ C^2 sur $]-1, +\infty[$ comme fonction polynomiale,
  et telle que : $h(]-1, +\infty[) =]0, +\infty[$.
  × $g : y \mapsto \ln(y)$ C^2 sur $]0, +\infty[$.
- Soit $x > -1$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$$

  Ainsi, f est concave sur $]-1, +\infty[$.
- Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ de f est située, en tout point, sous ses tangentes.
  En particulier, $\mathcal{C}_f$ est située sous sa tangente en 0, droite d'équation :

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = x$$

$$\boxed{\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x}$$

Remarque

- L'égalité de l'énoncé propose de comparer une quantité en x à un polynôme de degré 1. Il faut donc comprendre que l'on compare les positions de la courbe d'une fonction et d'une droite. Il est donc naturel de penser à une inégalité de convexité.
- Il était aussi possible de résoudre cette question en étudiant de la fonction $g : x \mapsto x - \ln(x+1)$. Il s'agit alors de dresser son tableau de variation et de montrer que : $\forall x > 1,\ g(x) \geqslant 0$. Cette solution moins astucieuse et rapide a le mérite de toujours fonctionner. Il faut donc s'assurer de savoir procéder ainsi.

□

d) En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Remarquons tout d'abord que :

$$\ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$$

- Soit $k \in [\![0,n]\!]$. En appliquant l'inégalité de la question ***2.c)*** à $\dfrac{1}{2^k} > -1$, on obtient :

$$\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

- En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) \leqslant 2$$

car $1 - \dfrac{1}{2^{n+1}} \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{La suite } (\ln(u_n)) \text{ est majorée par } 2.}$$

□

3. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in \left[2, \mathrm{e}^2\right]$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$\begin{array}{lll} & \ln(u_n) \leqslant 2 & \\ \text{donc} & u_n \leqslant \mathrm{e}^2 & \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto e^x\textit{)} \end{array}$$

- Ainsi, la suite (u_n) est :
  × croissante d'après la question ***2.b)***,
  × majorée par 2.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ converge vers } \ell \leqslant \mathrm{e}^2.}$$

- D'après la question ***2.a)***, $u_n \geqslant 2$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2$$

Par passage à la limite, on obtient : $2 \leqslant \ell \leqslant \mathrm{e}^2$.

$$\boxed{\ell \in [2, \mathrm{e}^2]}$$

□

4. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{2^k}\right)$.

Démonstration.

- On sait que :
  - × la suite (u_n) est convergente de limite ℓ,
  - × la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $[2, \mathrm{e}^2]$, donc en particulier est continue en $\ell \in [2, \mathrm{e}^2]$.

  On en déduit que la suite $(\ln(u_n))$ est convergente et de limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln(\ell)$$

- Or, d'après la question ***2.d)*** :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \ln(u_n)$$

  On en déduit que cette somme est convergente et par passage à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$$

$$\boxed{\text{En combinant ces résultats, on obtient : } \ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right).}$$

□

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{2^k}\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) &= \ln(\ell) - \ln(u_n) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) - \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \\
&= \left(\cancel{\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\right) - \cancel{\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)} \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)}$$

□

c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question ***2.c)***, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Pour tout $k \geqslant n+1$, $\dfrac{1}{2^k} \geqslant 0$, donc $\dfrac{1}{2^k} + 1 \geqslant 1$ et ainsi : $\ln\left(1 + \dfrac{1}{2^k}\right) \geqslant 0$.
  On en déduit que :
  $$\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \geqslant 0$$
  comme somme d'éléments positifs.
- Par ailleurs, on a démontré en ***2.d)*** que pour tout $k \geqslant n+1$: $\ln\left(1 + \dfrac{1}{2^k}\right) \leqslant \dfrac{1}{2^k} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.
  On en déduit que :
  $$\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$
  Or :
  $$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}.}$$

□

d) Déduire de la question précédente que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question précédente :

$$\begin{array}{llcccl} & 0 & \leqslant & \ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) & \leqslant & \dfrac{1}{2^n} \\ \text{donc} & 1 = \mathrm{e}^0 & \leqslant & \dfrac{\ell}{u_n} & \leqslant & \mathrm{e}^{\frac{1}{2^n}} \quad \textit{(car } x \mapsto e^x \textit{ est croissante)} \\ \text{et} & 1 & \geqslant & \dfrac{u_n}{\ell} & \geqslant & \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}} \quad \textit{(car } x \mapsto \frac{1}{x} \textit{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ \text{ainsi} & \ell & \geqslant & u_n & \geqslant & \ell\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}} \quad \textit{(car } \ell \geqslant 0\textit{)} \\ \text{d'où} & -\ell & \leqslant & -u_n & \leqslant & -\ell\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}} \\ \text{enfin} & 0 & \leqslant & \ell - u_n & \leqslant & \ell - \ell\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}} = \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right) \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right)}$$

□

e) Justifier que, pour tout réel x, on a $1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant x$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \dfrac{\ell}{2^n}$.
Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

Démonstration.

- Notons $f : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-x}$.
La fonction f est C^2 sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions C^2 sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = -\mathrm{e}^{-x} < 0$$
Ainsi, f est concave sur $\mathbb{R}$.
- Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ de f est située, en tout point, sous ses tangentes.
En particulier, $\mathcal{C}_f$ est située sous sa tangente en 0, droite d'équation :
$$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = x$$
$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant x.}$$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'inégalité précédente appliquée à $x = \dfrac{1}{2^n} \in \mathbb{R}$, on obtient :
$$1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}} \leqslant \frac{1}{2^n}$$
et ainsi, d'après la question précédente :
$$\ell - u_n \leqslant \ell \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right) \leqslant \ell\ \frac{1}{2^n}$$
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{\ell}{2^n}}$$
- Finalement, on sait que :
  - × $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \dfrac{\ell}{2^n}$,
  - × la série $\sum \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ est convergente car c'est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2} \in \,]-1, 1[$.
  Il en est de même de la série $\sum \dfrac{\ell}{2^n}$ *(on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par $\ell \neq 0$).*

  D'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum (\ell - u_n)$ converge.
$$\boxed{\sum (\ell - u_n) \text{ est une série convergente.}}$$

□

5. Écrire en **Scilab** une fonction `SuiteU` prenant en paramètre un entier `n` et calculant en sortie le terme $u_{\mathtt{n}}$.

Démonstration.

```
function u = SuiteU(n)
    u = 2
    for k = 1:n
        u = u ⋆ (1 + 1/2 ^ k)
    end
endfunction
```

□

6. a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |\ell - u_n| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^2}{2^n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Remarquons tout d'abord que d'après la question ***4.e)*** : $u_n - \ell \geqslant 0$.
  Ainsi : $|\ell - u_n| = u_n - \ell$.
- D'après la question ***3.***, $\ell \leqslant \mathrm{e}^2$. Ainsi, d'après la question ***4.e)*** :

$$0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{\ell}{2^n} \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{2^n}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |\ell - u_n| \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{u_n}}$$

□

b) Déterminer un entier N tel que : $\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant 10^{-3}$.

Démonstration.

- Il suffit de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$:

$$\frac{\mathrm{e}^2}{2^n} \ \leqslant \ 10^{-3}$$

  car alors, par transitivité, on aura :

$$|\ell - u_n| \ \leqslant \ \frac{\mathrm{e}^2}{2^n} \ \leqslant \ 10^{-3}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcll}
\dfrac{\mathrm{e}^2}{2^n} \leqslant 10^{-3} & \Leftrightarrow & \dfrac{2^n}{\mathrm{e}^2} \geqslant 10^3 & \textit{(car } x \mapsto \frac{1}{x} \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\
 & \Leftrightarrow & 2^n \geqslant 10^3\ \mathrm{e}^2 & \textit{(car } \mathrm{e}^2 > 0\textit{)} \\
 & \Leftrightarrow & n\ln(2) \geqslant \ln(10^3) + \ln(\mathrm{e}^2) & \textit{(car } x \mapsto \ln(x) \textit{ est strictement croissante)} \\
 & \Leftrightarrow & n\ln(2) \geqslant 3\ln(10) + 2 & \\
 & \Leftrightarrow & n \geqslant \dfrac{3\ln(10) + 2}{\ln(2)} & \textit{(car } \ln(2) > 0\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{L'entier } N = \left\lceil \frac{3\ln(10) + 2}{\ln(2)} \right\rceil \text{ convient.}}$$

□

c) Déduire de cet encadrement un programme **Scilab** permettant de déterminer une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près. *On pourra utiliser la fonction* `SuiteU`.

Démonstration.

```
N = ceil((2 + 3 ⋆ log(10)) / log(2))
u = SuiteU(N)
disp(u)
```

□

III. Exercice 3 (EML 2000)

Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges, et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

Partie I : Premier protocole

Les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon alétoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $\mathbb{E}(X)$ son espérance.

1. Montrer : $\forall k \in \{1, ..., 2n-1\}, \mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, 2n-1]\!]$.

- Un k-tirage réalisant l'événement $[X = k]$ est entièrement déterminé par :
  - $\times$ la carte obtenue au 1^{er} tirage : $\dbinom{2n-2}{1} = 2n-2$ choix,
    (on tire une des $2n-2$ cartes qui ne sont pas des rois rouges)
  - $\times$ la carte obtenue au $2^{\text{ème}}$ tirage : $\dbinom{2n-3}{1} = 2n-3$ choix,
    (on tire une des $2n-3$ cartes restantes)
  - $\times$ $\cdots$
  - $\times$ la carte obtenue au $(k-1)^{\text{ème}}$ tirage : $\dbinom{2n-(k-1)-1}{1} = 2n-(k-1)-1 = 2n-k$ choix,
  - $\times$ la carte obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage : 2.
    (on tire l'un des 2 rois rouges)
- Notons Ω' l'ensemble des k-tirages.
  Alors $\text{Card}(\Omega') = 2n \times (2n-1) \times \cdots \times (2n-k+1)$.
  Finalement on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=k]) &= \frac{\text{Card}([X=k])}{\text{Card}(\Omega')} = \frac{\cancel{(2n-2)} \cdots \cancel{(2n-k+1)}(2n-k)2}{2n(2n-1)\cancel{(2n-2)} \cdots \cancel{(2n-k+1)}} \\ &= \frac{(2n-k)\cancel{2}}{\cancel{2}n(2n-1)} = \frac{2n-k}{2n(2n-1)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![1, 2n-1]\!], \mathbb{P}([X=k]) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}}$$

Remarque
Il était aussi possible d'utiliser la formule des probabilités composées.
Pour ce faire, il faut prendre l'initiative d'introduire des événements.

- Pour tout $i \in [\![1, 2n]\!]$, notons R_i l'événement R_i : « on a tiré un roi rouge lors du $i^{\text{ème}}$ tirage ».
  Ainsi $\overline{R_i}$: « on a tiré une carte autre qu'un roi rouge lors du $i^{\text{ème}}$ tirage ».
  On a alors :
  $$[X=k] = \overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-1}} \cap R_k$$
- On en déduit, par la formule des probabilités composées, et sous réserve de l'existence des probabilités conditionnelles entrant en jeu :

$$\mathbb{P}([X=k]) = \mathbb{P}(\overline{R_1}) \times \mathbb{P}_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) \times \ldots \times \mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-2}}}(\overline{R_{k-1}}) \times \mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-1}}}(R_k)$$

- Or, pour tout $j \in [\![1, k-1]\!]$: $\mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{j-1}}}(\overline{R_j}) = \dfrac{2n-2-(j-1)}{2n-(j-1)} = \dfrac{2n-1-j}{2n+1-j}$.
  En effet, avant la découverte de la $j^{\text{ème}}$ carte, on a tiré $j-1$ cartes (aucun roi rouge) et il reste donc $2n-(j-1)$ cartes dans le paquet dont $2n-2-(j-1)$ qui ne sont pas des rois rouges.
- Et $\mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-1}}}(R_k) = \dfrac{2}{2n-(k-1)} = \dfrac{2}{2n+1-k}$.
  En effet, avant la découverte de la $k^{\text{ème}}$ carte, on a tiré $k-1$ cartes et il reste donc $2n-(k-1)$ cartes dans le paquet dont 2 qui sont des rois rouges.
- On en déduit que :

$$\mathbb{P}([X=k]) \;=\; \frac{\cancel{2n-2}}{2n}\ \frac{\cancel{2n-3}}{2n-1}\ \frac{\cancel{2n-4}}{\cancel{2n-2}} \cdots \frac{\cancel{2n+1-k}}{\cancel{2n+3-k}}\ \frac{2n-k}{\cancel{2n+2-k}}\ \frac{2}{\cancel{2n+1-k}}$$

□

2. Montrer : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{2n+1}{3}$.
On rappelle que pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, on a : $\sum\limits_{k=1}^{p} k^2 = \dfrac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.

Démonstration.
Remarquons que $X(\Omega) = [\![1, 2n-1]\!]$. En effet :
× on peut obtenir un roi rouge dès la première carte,
× comme le jeu contient 2 rois rouges et $2n$ cartes, on obtient le premier roi rouge au plus tard au $(2n-1)^{\text{ème}}$ tirage,
× on peut tirer le premier roi rouge dans chaque tirage intermédiaire.

Ainsi X est une variable aléatoire finie.

$$\boxed{X \text{ admet donc une espérance.}}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{2n-1} k\ \mathbb{P}([X=k]) = \sum_{k=1}^{2n-1} k\ \frac{2n-k}{n(2n-1)} \\
&= \frac{1}{n(2n-1)} \sum_{k=1}^{2n-1} k(2n-k) \\
&= \frac{1}{n(2n-1)} \sum_{k=1}^{2n-1} (2nk-k^2) \\
&= \frac{1}{n(2n-1)} \left(2n \sum_{k=1}^{2n-1} k - \sum_{k=1}^{2n-1} k^2 \right) \\
&= \frac{1}{n(2n-1)} \left(2n\ \frac{(2n-1)(2n)}{2} - \frac{(2n-1)(2n)(2\ (2n-1)+1)}{6} \right) \\
&= \frac{(2n-1)(2n)}{n(2n-1)} \left(2n\ \frac{1}{2} - \frac{(2\ (2n-1)+1)}{6} \right) \\
&= 2 \left(2n\ \frac{1}{2} - \frac{4n-1}{6} \right) \;=\; \frac{2}{6}\,(6n-(4n-1)) \\
&= \frac{2n+1}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{2n+1}{3}}$$

□

3. Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs losqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte, G_1 est égale à $a - k$.
Déterminer l'espérance de la variable aléatoire G_1.

Démonstration.

- Par définition de G_1, on a
$$G_1 = a - X$$
- Ainsi, la v.a.r. G_1 admet une espérance en tant que somme de v.a.r. admettant une espérance.
De plus, par linéarité de l'espérance :
$$\mathbb{E}(G_1) = \mathbb{E}(a - X) = a - \mathbb{E}(X) = a - \frac{2n+1}{3}$$
$$\boxed{\mathbb{E}(G_1) = a - \frac{2n+1}{3}}$$

Remarque
Si on ne repère pas la relation $G_1 = a - X$, on peut toujours résoudre cette question en déterminant la loi de G_1.

- Déterminons la loi de G_1.
  - $G_1(\Omega) = \{a - k \ / \ k \in [\![1, 2n-1]\!]\}$ puisque le premier rouge peut être découvert entre le 1^{er} et le $(2n-1)^{\text{ème}}$ tirage.
  - Soit $k \in [\![1, 2n-1]\!]$.
Comme : $[G_1 = a - k] = [X = k]$, on a, d'après la question ***1.*** :
$$\mathbb{P}([G_1 = a - k]) = \mathbb{P}([X = k]) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}$$
- G_1 est une variable aléatoire finie. Donc elle admet une espérance.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(G_1) & = & \sum\limits_{k=1}^{2n-1} (a-k)\ \mathbb{P}([G_1 = a-k]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{2n-1} (a-k)\ \mathbb{P}([X = k]) & \textit{(car } [G_1 = a-k] = [X = k]\textit{)} \\
& = & a \sum\limits_{k=1}^{2n-1} \mathbb{P}([X = k]) - \sum\limits_{k=1}^{2n-1} k\ \mathbb{P}([X = k]) & \\
& = & a - \mathbb{E}(X) & \textit{(car } ([X = k])_{k \in [\![1,2n-1]\!]} \textit{ est un sce)}
\end{array}$$
□

Partie II : Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes. Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs lorsqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ème}}$ carte découverte ($k \leqslant n$), G_2 est égale à $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

1. Pour tout entier $k \in \{1, ..., n\}$, déterminer $\mathbb{P}([G_2 = a - k])$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
On remarque que $[G_2 = a - k] = [X = k]$. On en déduit :

$$\mathbb{P}([G_2 = a - k]) = \mathbb{P}([X = k]) = \frac{2n - k}{n(2n - 1)}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}([G_2 = a - k]) = \frac{2n - k}{n(2n - 1)}}$$

□

2. Vérifier : $\mathbb{P}([G_2 = -n]) = \dfrac{n - 1}{2(2n - 1)}$.

Démonstration.

- On remarque que : $G_2(\Omega) = \{a - k \ / \ k \in [\![1, n]\!]\} \cup \{-n\}$.
  En effet, le 1[er] roi rouge peut être tiré entre le 1[er] et le $n^{\text{ème}}$ tirage, ou ne jamais être tirée.
- La famille $([G_2 = a - 1], [G_2 = a - 2], \dots, [G_2 = a - n], [G_2 = -n])$ est le système complet d'événements associé à G_2.
  On en déduit que : $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([G_2 = a - k]) + \mathbb{P}([G_2 = -n]) = 1$. Ou encore :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([G_2 = -n]) &= 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([G_2 = a - k]) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{2n - k}{n(2n - 1)} \\
&= 1 - \frac{1}{n(2n - 1)} \left(\sum_{k=1}^{n} (2n - k) \right) \\
&= 1 - \frac{1}{n(2n - 1)} \left(2n \sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} k \right) \\
&= 1 - \frac{1}{n(2n - 1)} \left(2n\ n - \frac{n(n + 1)}{2} \right) \\
&= 1 - \frac{n}{2n(2n - 1)} (4n - (n + 1)) \\
&= 1 - \frac{1}{2(2n - 1)} (3n - 1) \\
&= \frac{(4n - 2) - (3n - 1)}{2(2n - 1)} = \frac{n - 1}{2(2n - 1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([G_2 = -n]) = \frac{n - 1}{2(2n - 1)}}$$

□

3. Montrer : $\mathbb{E}\left(G_2\right) = \dfrac{3\left(3n-1\right)a - \left(7n^2-1\right)}{6\left(2n-1\right)}$.

Démonstration.

- G_2 est une v.a.r. finie, donc elle admet une espérance.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(G_2) & = & \sum\limits_{k=1}^{n} (a-k)\ \mathbb{P}([G_2 = a-k]) + (-n)\ \mathbb{P}([G_2 = -n]) \\ & = & \left(\sum\limits_{k=1}^{n} (a-k) \dfrac{2n-k}{n(2n-1)}\right) - n\dfrac{n-1}{2(2n-1)} \\ & = & \dfrac{1}{n(2n-1)} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} (a-k)(2n-k)\right) - n\dfrac{n-1}{2(2n-1)} \end{array}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{k=1}^{n} (a-k)(2n-k) & = & \sum\limits_{k=1}^{n} (2an - (a+2n)k + k^2) \\ & = & 2an \sum\limits_{k=1}^{n} 1 - (a+2n) \sum\limits_{k=1}^{n} k + \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \\ & = & 2an\ n - (a+2n)\ \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ & = & 2an^2 + \dfrac{n(n+1)}{6} (-3\ (a+2n) + (2n+1)) \\ & = & 2an^2 + \dfrac{n(n+1)}{6} (-3a - 4n + 1) \\ & = & \dfrac{n}{6} (12an + (n+1)(-3a-4n+1)) \\ & = & \dfrac{n}{6} \left(12an - 3an - 4n^2 + n - 3a - 4n + 1\right) \\ & = & \dfrac{n}{6} \left(9an - 3a - 3n + 1 - 4n^2\right) \\ & = & \dfrac{n}{6} \left(3a\ (3n-1) + 1 - 3n - 4n^2\right) \end{array}$$

- En combinant ces résultats, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(G_2) & = & \dfrac{1}{n(2n-1)} \left(\dfrac{n}{6} \left(3a\ (3n-1) + 1 - 3n - 4n^2\right)\right) - n\dfrac{n-1}{2(2n-1)} \\ & = & \dfrac{n}{6n(2n-1)} \left(\left(3a\ (3n-1) + 1 - 3n - 4n^2\right) - 3n(n-1)\right) \\ & = & \dfrac{1}{6(2n-1)} \left(3a\ (3n-1) + 1 - 7n^2\right) \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(G_2) = \dfrac{3(3n-1)a - (7n^2-1)}{6(2n-1)}}$$

□

Partie III : Comparaison des deux protocoles

On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$). Déterminer, selon les valeurs de a, le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.

Démonstration.
On cherche à déterminer le protocole donnant l'espérance de gain la plus élevée.
On cherche donc à comparer $\mathbb{E}(G_1)$ et $E(G_2)$.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(G_1) \leqslant \mathbb{E}(G_2) & \Leftrightarrow & a - \dfrac{2n+1}{3} \leqslant \dfrac{3(3n-1)a - (7n^2-1)}{6(2n-1)} & \\[2mm]
& \Leftrightarrow & 6(2n-1)a - 2(2n-1)(2n+1) \leqslant 3(3n-1)a - (7n^2-1) & \textit{(car } 6(2n-1) > 0\textit{)} \\[2mm]
& \Leftrightarrow & (12n - 6 - 9n + 3)a \leqslant 8n^2 - 2 - 7n^2 + 1 & \\[2mm]
& \Leftrightarrow & (3n-3)a \leqslant n^2 - 1 & \\[2mm]
& \Leftrightarrow & a \leqslant \dfrac{(n+1)\cancel{(n-1)}}{3\cancel{(n-1)}} & \textit{(car } n = 16, \textit{ donc } n-1 > 0\textit{)} \\[2mm]
& \Leftrightarrow & a \leqslant \dfrac{n+1}{3} = \dfrac{17}{3} &
\end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}
\text{Si } a > \dfrac{17}{3}\text{, le protocole 1 est le plus favorable au joueur.} \\[2mm]
\text{Si } a < \dfrac{17}{3}\text{, le protocole 2 est le plus favorable au joueur.} \\[2mm]
\text{Si } a = \dfrac{17}{3}\text{, les 2 se valent.}
\end{array}}$$

□

IV. Problème (EDHEC 2005)

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O.
Au départ, le mobile est à l'origine.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.
On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $[T = k]$ en fonction d'évènements mettant en jeu certaines des variables X_i.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- L'événement $[T = k]$ est réalisé si le mobile revient en 0 pour la première fois à l'instant k. Cela signifie qu'entre l'instant 0 et l'instant $k-1$, le mobile n'est pas revenu en 0. Il a donc avancé d'une position à chacun de ces instants. Ainsi :
  - × le mobile se trouve en position 1 à l'instant 1.
  - × le mobile se trouve en position 2 à l'instant 2.
  - × ...
  - × le mobile se trouve en position $k-1$ à l'instant $k-1$.
  - × le mobile se trouve en position 0 à l'instant k.

$$\boxed{[T = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i = i]\right) \cap [X_k = 0]}$$

- Afin de lever toute ambiguïté, précisons cette formule lorsque $k = 1$.

$$\boxed{[T = 1] = [X_1 = 0]}$$

(le mobile revient à la position 0 *dès l'instant* 1*)* □

b) Donner la loi de X_1.

Démonstration.

- $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$. En effet, après l'instant 0 :
  - × soit le mobile a avancé d'une position et se trouve donc en position 1.
  - × soit le mobile est resté sur le point origine.
- D'après l'énoncé, on a de plus :

$$\mathbb{P}([X_1 = 0]) = 1 - p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_1 = 1]) = p$$

$$\boxed{\text{On en conclut que : } X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p).}$$

□

c) En déduire $\mathbb{P}([T=k])$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***1.a)*** :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([T=k]) & = & \mathbb{P}\left(\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k-1} [X_i = i]\right) \cap [X_k = 0]\right) \\ & = & \mathbb{P}\left([X_1 = 1] \cap \ldots \cap [X_{k-1} = k-1] \cap [X_k = 0]\right) \end{array}$$

- On en déduit, par la formule des probabilités composées, et sous réserve de l'existence des probabilités conditionnelles entrant en jeu :

$$\begin{array}{rl} & \mathbb{P}([T=k]) \\ = & \mathbb{P}([X_1 = 1]) \times \ldots \times \mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{k-2}=k-2]}([X_{k-1} = k-1]) \times \mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{k-1}=k-1]}([X_k = 0]) \end{array}$$

- La position du mobile à un instant $j \geqslant 2$ ne dépendant que de sa position à l'instant précédent, on obtient :

$$\mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{j-1}=j-1]}([X_j = j]) \ = \ \mathbb{P}_{[X_{j-1}=j-1]}([X_j = j]) = p$$

  et :

$$\mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{k-1}=k-1]}([X_k = 0]) \ = \ \mathbb{P}_{[X_{k-1}=k-1]}([X_k = 0]) = 1-p$$

  ce qui permet de lever la réserve précédente.

- On en conclut :

$$\boxed{\mathbb{P}([T=k]) = p \times \ldots \times p \times (1-p) = p^{k-1}\ (1-p)}$$

- Remarquons alors que : $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
  (le mobile peut revenir, pour la première fois en position 0 à n'importe quel instant)
  On peut donc en conclure, grâce au calcul de probabilité précédent que :

$$\boxed{T \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p)}$$

□

2. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

▶ **Initialisation** :
D'après l'énoncé, $X_0 = 0$. Ainsi : $X_0(\Omega) = \{0\} = [\![0, 0]\!]$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.

▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $X_{n+1}(\Omega) = [\![0, n+1]\!]$).
D'après l'hypothèse de récurrence, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Autrement dit, le mobile peut se trouver à n'importe quelle position $k \in [\![0, n]\!]$ à l'instant n. Deux cas se présentent alors :

× soit le mobile se déplace en avant et ainsi le mobile se retrouve en position $k+1 \in [\![1, n+1]\!]$.

× soit le mobile revient en position 0.

Ainsi : $X_{n+1}(\Omega) = [\![0, n+1]\!]$.
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ X_n(\Omega) = [\![0, n]\!].}$$

□

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'évènements $([X_{n-1} = k])_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ pour montrer que : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
D'après la question précédente, la famille $([X_{n-1} = k])_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est le système complet d'événements associé à X_{n-1}.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X_n = 0]) & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k] \cap [X_n = 0]) \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \times \mathbb{P}_{[X_{n-1}=k]}([X_n = 0]) \quad \textit{(car } \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \neq 0\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \times (1-p) \\ & = & (1-p) \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \\ & = & (1-p) \end{array}$$

En effet, comme $([X_{n-1} = k])_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une système complet d'événements :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) = 1$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p.}$$

□

3. a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall k \in \{1, 2, \ldots n+1\}, \ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p\, \mathbb{P}([X_n = k-1])$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in [\![1, n+1]\!]$.

- Remarquons tout d'abord que :

$$[X_{n+1} = k] \ = \ [X_n = k-1] \cap [X_{n+1} = k]$$

  Le sens réciproque ($\supset$) est évident.
  Le sens direct ($\subset$) provient du fait que si le mobile se trouve en position k à l'instant $n+1$, il était forcément en position $k-1$ à l'instant précédent.

- On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) & = & \mathbb{P}([X_n = k-1] \cap [X_{n+1} = k]) \\ & = & \mathbb{P}([X_n = k-1]) \times \mathbb{P}_{[X_n=k-1]}([X_{n+1} = k]) \quad \textit{(par la formule des probabilités composées)} \\ & = & \mathbb{P}([X_n = k-1]) \times p \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall k \in [\![1, n+1]\!], \ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p\, \mathbb{P}([X_n = k-1])}$$

□

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{0, 1, 2 \ldots, n-1\},\ \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k\,(1-p)$.
En déduire également la valeur de $\mathbb{P}([X_n = n])$.
Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

Démonstration.

- Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$
  où $\mathcal{P}(n)$: $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k\,(1-p)$.

  ▸ **Initialisation** :
  D'après la question ***2.b)*** : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.

  ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p^k\,(1-p)$).
  Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Deux cas se présentent :

  × soit $k = 0$:
  D'une part : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 0]) = 1 - p$.
  D'autre part : $p^0\ (1-p) = 1 - p$.
  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est bien vérifiée dans ce cas.

  × soit $k \in [\![1, n]\!]$:
  D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) & = & p\ \mathbb{P}([X_n = k-1]) & \\ & = & p \times p^{k-1}(1-p) & \textit{(d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à } k-1 \in [\![0, n-1]\!]\textit{)} \\ & = & p^k(1-p) & \end{array}$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée dans ce cas.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k\,(1-p).}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le résultat de la question précédente appliqué à $k = n+1 \in [\![1, n+1]\!]$:

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = n+1]) = p\ \mathbb{P}([X_n = n])$$

  On peut alors, par une récurrence immédiate, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X_n = n]) = p^n$$

  En effet, la propriété est vérifiée au rang 0 (question ***2.b)***).
  Et si elle est vérifiée au rang n alors, d'après l'égalité ci-dessus :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = n+1]) = p\ \mathbb{P}([X_n = n]) = p\ p^n = p^{n+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X_n = n]) = p^n}$$

- Ce résultat s'explique par le fait que le seul n-déplacement réalisant $[X_n = n]$ est celui dans lequel le mobile ne fait qu'avancer. Chaque avancée se produisant avec probabilité p, un tel n-déplacement se déroule avec probabilité p^n.

□

c) Vérifier que $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les questions précédentes :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_n = k])\right) + \mathbb{P}([X_n = n]) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} p^k\,(1-p)\right) + p^n \\
&= (1-p)\,\left(\sum_{k=0}^{n-1} p^k\right) + p^n \\
&= \cancel{(1-p)}\,\frac{1-p^n}{\cancel{1-p}} + p^n && \textit{(car } p \neq 1\textit{)} \\
&= 1 - p^n + p^n \;=\; 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) = 1}$$

□

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.
On rappelle que `grand(1,1,'uin',0,2)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = input(' Entrez un entier naturel n : ')
X = 0
for k = 1:n
    u = grand(1,1,'uin',0,2)
    if u == 2 then
        X = ...........
    else
        X = ...........
    end
end
disp(X)
```

Démonstration.

- D'après l'énoncé, le résultat affiché `X` est une valeur possible prise par X_n, obtenue par simulation.La variable `X` est initialisée à 0 (position de départ du mobile). Puis elle doit être mise à jour pour simuler un déplacement vers la droite (`X = X+1`) ou un retour à l'origine (`X = 0`).
- Si $p = \frac{1}{3}$, alors, à chaque instant n, le mobile se déplace vers la droite avec probabilité $\frac{1}{3}$ et revient en position 0 avec probabilité $\frac{2}{3}$.
- L'instruction `grand(1,1,'uin',0,2)` renvoie 0 avec probabilité $\frac{1}{3}$, 1 avec probabilité $\frac{1}{3}$ et 2 avec probabilité $\frac{1}{3}$. Ainsi, la probabilité d'obtenir soit 0 soit 1 est de $\frac{2}{3}$.

- L'ensemble des points précédents permet de compléter les lignes à trou :

```
6          X = X + 1
```

```
8          X = 0
```

□

5. ***a)*** Montrer que : $\forall n \geqslant 2,\quad \sum\limits_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \dfrac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \geqslant 2,\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k\,p^{k-1} = \dfrac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

▸ **Initialisation** :

- D'une part : $\sum\limits_{k=1}^{2-1} k\ p^{k-1} = \sum\limits_{k=1}^{1} k\ p^{k-1} = 1\ p^0 = 1$.
- D'autre part : $\dfrac{(2-1)\,p^2 - 2\,p^{2-1} + 1}{(1-p)^2} = \dfrac{p^2 - 2p + 1}{(1-p)^2} = \dfrac{(1-p)^2}{(1-p)^2} = 1$.

Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

▸ **Hérédité** : soit $n \geqslant 2$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(i.e.\ \sum\limits_{k=1}^{n} k\ p^{k-1} = \dfrac{n\ p^{n+1} - (n+1)\,p^n + 1}{(1-p)^2}\right)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\ p^{k-1} &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\ p^{k-1}\right) + n\ p^{n-1} \\
&= \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2} + n\ p^{n-1} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1 + n\ (1-p)^2\ p^{n-1}}{(1-p)^2} \\
&= \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1 + n\ (1-2p+p^2)\ p^{n-1}}{(1-p)^2} \\
&= \frac{(n-1)\,p^n - \cancel{n\,p^{n-1}} + 1 + \left(\cancel{n\,p^{n-1}} - 2\,n\,p^n + n\,p^{n+1}\right)}{(1-p)^2} \\
&= \frac{(n-1-2n)\,p^n + 1 + n\,p^{n+1}}{(1-p)^2} \\
&= \frac{n\,p^{n+1} - (n+1)\,p^n + 1}{(1-p)^2}
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \geqslant 2,\ \sum_{k=1}^{n-1} k\ p^{k-1} = \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}}$$

□

b) En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{p(1-p^n)}{1-p}$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- D'après la question ***2.a)***, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
  La v.a.r. X_n est donc finie. Ainsi, X_n admet une espérance.
- De plus, par définition :

$$\begin{array}{rll}
& \mathbb{E}(X_n) & \\
= & \displaystyle\sum_{k \in X_n(\Omega)} k\ \mathbb{P}([X_n = k]) & \\
= & \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\ \mathbb{P}([X_n = k])\right) + 0 \times \mathbb{P}([X_n = 0]) + n \times \mathbb{P}([X_n = n]) & \\
= & \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\ p^k\ (1-p)\right) + n\ p^n & \textit{(d'après les questions 2.b), 3.b))} \\
= & (1-p)\ p\ \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\ p^{k-1}\right) + n\ p^n & \\
= & \cancel{(1-p)}\ p\ \dfrac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^{\cancel{2}}} + n\ p^n & \textit{(d'après la question précédente)} \\
= & p\ \left(\dfrac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1 + n\ (1-p)\ p^{n-1}}{1-p}\right) & \\
= & p\ \left(\dfrac{\cancel{np^n} - p^n - \cancel{n\,p^{n-1}} + 1 + \cancel{n\,p^{n-1}} - \cancel{np^n}}{1-p}\right) & \\
= & p\ \left(\dfrac{1-p^n}{1-p}\right) &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{p(1-p^n)}{1-p}}$$

□

6. a) Montrer, en utilisant la question 3a), que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) = p\left(\mathbb{E}\left(X_n^2\right) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Les v.a.r. X_n et X_{n+1} sont des v.a.r. finies. Elles admettent donc des moments d'ordre 2.

- D'après le théorème de transfert :

$$\begin{array}{cll}
& \mathbb{E}(X_{n+1}^2) & \\
= & \sum\limits_{k \in X_{n+1}(\Omega)} k^2 \ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) & \\
= & \sum\limits_{k=0}^{n+1} k^2 \ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) & \\
= & \sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2 \ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) & \textit{(car } 0^2 \ \mathbb{P}([X_{n+1} = 0] = 0\textit{)} \\
= & \sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2 \ p \ \mathbb{P}([X_n = k-1]) \ = \ p \sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2 \ \mathbb{P}([X_n = k-1]) & \textit{(d'après la question } \textbf{3.a)}\textit{)} \\
= & p \ \sum\limits_{k=0}^{n} (k+1)^2 \ \mathbb{P}([X_n = k]) & \textit{(par décalage d'indice)} \\
= & p \left(\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 \ \mathbb{P}([X_n = k]) + 2 \ \sum\limits_{k=0}^{n} k \ \mathbb{P}([X_n = k]) + \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) \right) & \\
= & p \left(\mathbb{E}(X_n^2) + 2 \ \mathbb{E}(X_n) + 1 \right) & \begin{array}{l} \textit{(par théorème de transfert,} \\ \textit{par définition de l'espérance} \\ \textit{et par la question } \textbf{3.c)}\textit{)} \end{array}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathbb{E}(X_{n+1}^2) = p \left(\mathbb{E}(X_n^2) + 2 \ \mathbb{E}(X_n) + 1 \right)}$$

□

b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + (2n-1) \dfrac{p^{n+1}}{1-p}$.

Montrer que $u_{n+1} = p \ u_n + \dfrac{p\,(1+p)}{1-p}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Par définition de la suite (u_n) :

$$\begin{array}{rcll}
u_{n+1} & = & \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) + (2(n+1)-1) \dfrac{p^{n+2}}{1-p} & \\
& = & \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) + (2n+1) \dfrac{p^{n+2}}{1-p} & \\
& = & p \left(\mathbb{E}(X_n^2) + 2 \ \mathbb{E}(X_n) + 1 \right) + (2n+1) \dfrac{p^{n+2}}{1-p} & \begin{array}{l} \textit{(d'après la} \\ \textit{question précédente)} \end{array}
\end{array}$$

- D'autre part :

$$\begin{array}{rcl}
p \ u_n & = & p \ \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + p \ \ (2n-1) \dfrac{p^{n+1}}{1-p} \\
& = & p \ \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + (2n-1) \dfrac{p^{n+2}}{1-p}
\end{array}$$

- On obtient, par soustraction des deux lignes :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - pu_n &= \cancel{p\,\mathbb{E}(X_n^2)} - \cancel{p\,\mathbb{E}(X_n^2)} + 2p\,\mathbb{E}(X_n) + p + ((\cancel{2n} + 1) - (\cancel{2n} - 1))\frac{p^{n+2}}{1-p} \\
&= 2p\,\frac{p(1-p^n)}{1-p} + p + 2\,\frac{p^{n+2}}{1-p} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.b)}}\textit{)} \\
&= p\,\frac{2p(1-p^n)}{1-p} + p\,\frac{1-p}{1-p} + p\,\frac{2p^{n+1}}{1-p} \\
&= p\,\frac{2p(1-p^n) + (1-p) + 2p^{n+1}}{1-p} \\
&= p\,\frac{2p - \cancel{2p^{n+1}} + 1 - p + \cancel{2p^{n+1}}}{1-p} \\
&= p\,\frac{1+p}{1-p}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = p\,u_n + p\,\frac{1+p}{1-p}}$$

□

c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $\mathbb{E}\left(X_n^2\right)$ en fonction de p et n.

Démonstration.
D'après la formule trouvée dans la question précédente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

- L'équation de point fixe associée à la suite (u_n) est :

$$x = p\,x + \frac{p(1+p)}{1-p}$$

  Elle admet pour unique solution : $\lambda = \dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2}$.

- On écrit :

$$\begin{array}{rcccccl}
u_{n+1} & = & p & \times & u_n & + & \dfrac{p(1+p)}{1-p} \quad (L_1) \\[2ex]
\lambda & = & p & \times & \lambda & + & \dfrac{p(1+p)}{1-p} \quad (L_2) \\[2ex]
\text{et donc} \quad u_{n+1} - \lambda & = & p & \times & (u_n - \lambda) & & \quad (L_1)-(L_2)
\end{array}$$

  Notons alors (v_n) la suite de terme général $v_n = u_n - \lambda$.

- La suite (v_n) est géométrique de raison p.
  Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n \ = \ p^n \times v_0 \ = \ p^n \times (u_0 - \lambda)$$

  On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \ = \ v_n + \lambda \ = \ p^n \times (u_0 - \lambda) + \lambda$$

- Enfin : $u_0 = \mathbb{E}(X_0^2) + (2 \times 0 - 1)\dfrac{p^1}{1-p} = \mathbb{E}(0^2) - \dfrac{p}{1-p} = -\dfrac{p}{1-p}$.

- Ainsi : $u_0 - \lambda = -\dfrac{p}{1-p} - \dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2} = \dfrac{-p(1-p) - p(1+p)}{(1-p)^2} = -p\dfrac{1-\cancel{p}+1+\cancel{p}}{(1-p)^2} = \dfrac{-2p}{(1-p)^2}$.
- On en conclut :

$$\begin{aligned} u_n &= p^n \, \frac{-2p}{(1-p)^2} + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,(1+p-2p^n) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{p}{(1-p)^2}\,(1+p-2p^n)}$$

- Il reste à déterminer $\mathbb{E}(X_n^2)$. Par définition de u_n :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n^2) &= u_n - (2n-1)\,\frac{p^{n+1}}{1-p} \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,(1+p-2p^n) - (2n-1)\,\frac{p^{n+1}}{1-p} \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,(1+p-2p^n) - (2n-1)(1-p)\ p^n\ \frac{p}{(1-p)^2} \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,((1+p-2p^n) - (2n-1)(1-p)\ p^n) \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,((1+p-2p^n) - (2n-1)(1-p)\ p^n) \end{aligned}$$

- Enfin :

$$-(2n-1)(1-p) = (2n-1)(p-1) = 2np - 2n - p + 1 = (1-2n) + (2n-1)p$$

- On en conclut :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n^2) &= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p-2p^n+(1-2n)p^n+(2n-1)p^{n+1}\right) \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p+(-1-2n)p^n+(2n-1)p^{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n^2) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p-(1+2n)p^n+(2n-1)p^{n+1}\right)}$$

□

d) Montrer enfin que : $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{p}{(1-p)^2}\left(1-(2n+1)\,p^n\,(1-p) - p^{2n+1}\right)$.

Démonstration.

- On a déjà vu en question ***6.a)*** que la v.a.r. X_n admet un moment d'ordre 2. Ainsi X_n admet une variance.

- D'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_n) &= \mathbb{E}(X_n^2) - (\mathbb{E}(X_n))^2 \\
&= \frac{p}{(1-p)^2}\big(1 + p - (1+2n)p^n + (2n-1)p^{n+1}\big) - \left(\frac{p(1-p^n)}{1-p}\right)^2 \\
&= \frac{p}{(1-p)^2}\big(1 + p - (1+2n)p^n + (2n-1)p^{n+1}\big) - \frac{p}{(1-p)^2}\, p(1-p^n)^2 \\
&= \frac{p}{(1-p)^2}\big(1 + \cancel{p} - (1+2n)p^n + (2n-1)p^{n+1} - p(\cancel{1} - 2p^n + p^{2n})\big) \\
&= \frac{p}{(1-p)^2}\big(1 - (1+2n)p^n + (2n+1)p^{n+1} - p^{2n+1}\big) \\
&= \frac{p}{(1-p)^2}\big(1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1}\big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\big(1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1}\big)}$$

□