DS2 (version B) /156

I. Exercice 1 /33

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 /15

- On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
- On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Calculer AFA, AGA, AHA.

- **3 pts (1 par calcul)**

2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de $\mathcal{S}_2$. Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_2$.

- **3 pts : écriture de $\mathcal{S}_2$ sous forme de sev engendré (1 pour expression des contraintes, 1 pour résolution, 1 pour** $\mathrm{Vect}(\dots)$**)**
- **1 pt : famille génératrice**
- **1 pt : famille libre**
- **1 pt : conclusion**

On note u l'application qui, à chaque matrice S de $\mathcal{S}_2$, associe la matrice $u(S) = ASA$.

3. *a)* Montrer : $\forall s \in \mathcal{S}_2,\ u(S) \in \mathcal{S}_2$.

- **2 pts : si la justification A et S sont symétriques donnée (1 pt si justification absente et 0 si ${}^t(ASA) = {}^tA{}^tS{}^tA$)**

b) Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_2$.

- **1 pt : $u(\mathcal{S}_2) \subset \mathcal{S}_2$**
- **2 pts : linéarité de u**

c) Donner la matrice de u dans la base (F, G, H) de $\mathcal{S}_2$.

- **1 pt (0 si confusion d'objets)**

Partie 2 : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3 /18

On note : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$, $\quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que -4, 1, 16 sont valeurs propres de M et déterminer, pour chacune de celles-ci, une base du sous-espace propre associé. Est-ce que M est diagonalisable ?

- **3 pts : 1 par valeur propre**
- **1 pt : écriture du système**
- **1 pt : résolution du système**
- **1 pt : écriture sous forme de sev engendré**
- **1 pt : famille génératrice + libre**
- **2 pts : de même pour E_1**
- **2 pts : de même pour E_{16}**
- **1 pt : M est diagonalisable**

2. Déterminer une matrice P carrée d'ordre 3, inversible, de première ligne égale à $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, telle que $M = PDP^{-1}$.

- **1 pt : M diagonalisable donc semblable à une matrice diagonale**
- **1 pt : P et D**

3. Vérifier que $(D+4I)(D-I)(D-16I)$ est la matrice nulle.

- **1 pt**

4. En déduire : $\quad M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.

- **1 pt : $D^3 - 13D^2 - 52D + 64I$ (car I et D commutent !)**
- **1 pt : puissances de M en fonction de D**
- **1 pt : multiplication matricielle**

5. Établir : $u^3 = 13u^2 + 52u - 64e$, où e désigne l'application indentité de $\mathcal{S}_2$ et où u a été définie dans la partie I.

- **1 pt : passerelle endomorphisme / matrice représentative**

II. Exercice 2 (EDHEC 2010) /40

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.

- **3 pts (1 pour chaque, 0 si donné sous forme non simplifiée)**

2. *a)* Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 2$.

- **1 pt : découpage de** u_n
- **1 pt :** $1 + \frac{1}{2^k} \geqslant 1$

b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).

- **1 pt :** u_{n+1} **en fonction de** u_n
- **1 pt :** $u_n \neq 0$
- **1 pt :** $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ **et donc** $u_{n+1} \geqslant u_n$**(0 si justification** $u_n > 0$ **oubliée)**

c) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$.

- **1 pt : concavité**
- **1 pt : conclusion**

d) En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.

- **1 pt : propriété de** $\ln$
- **1 pt :** $\frac{1}{2^k} > -1$
- **1 pt : conclusion**

3. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $[2, \mathrm{e}^2]$.

- **1 pt : majoration**
- **1 pt : théorème de convergence monotone**
- **1 pt : encadrement de** ℓ

4. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

- **1 pt : continuité** $\ln$
- **1 pt :** $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

- **1 pt**

c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question 3a), que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

- **1 pt : minoration**
- **2 pts : majoration**

d) Déduire de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.

- **1 pt : justification**
- **1 pt : $\ell > 0$**

e) Justifier que, pour tout réel x, on a $1 - e^{-x} \leqslant x$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \dfrac{\ell}{2^n}$.
Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

- **1 pt : inégalité $1 - e^{-x} \geqslant x$**
- **1 pt : application inégalité de convexité**
- **3 pts : critère de comparaison des SATP (encadrement, convergence de la série géométrique, citation du critère)**

5. Écrire en **Scilab** une fonction `SuiteU` prenant en paramètre un entier `n` et calculant en sortie le terme $u_{\mathtt{n}}$.

- **3 pts : fonction, initialisation, boucle for**

6. *a)* Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \dfrac{e^2}{2^n}$.
Déterminer un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-3}$.

- **1 pt : $\ell - u_n \leqslant \dfrac{e^2}{2^n}$**
- **1 pt : valeur absolue**
- **1 pt : minoration de N**
- **1 pt : valeur de N**

b) Déduire de cet encadrement un programme **Scilab** permettant de déterminer une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près. *On pourra utiliser la fonction* `SuiteU`.

- **3 pts : N, u, disp**

III. Exercice 3 (EML 2000) /21

Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges, et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

Partie I : Premier protocole /9

Les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon alétoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $\mathbb{E}(X)$ son espérance.

1. Montrer : $\forall k \in \{1, ..., 2n-1\}, \mathbb{P}([X=k]) = \dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$

- **2 pts :** Card($[X = k]$)
- **1 pt :** Card(Ω')

2. Montrer : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{2n+1}{3}$.

On rappelle que pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.

- **1 pt : support**
- **1 pt : existence espérance**
- **2 pts : calcul (1 point pour $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=1}^{2n-1} k\mathbb{P}([X=k])$ même si calcul erroné par la suite)**

3. Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs losqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte, G_1 est égale à $a - k$.
Déterminer l'espérance de la variable aléatoire G_1.

- **1 pt : lien G_1 et X**
- **1 pt : linéarité espérance**

Partie II : Deuxième protocole /9

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes. Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs losqu'il obtient le premier roi rouge.On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ème}}$ carte découverte ($k \leqslant n$), G_2 est égale à $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

1. Pour tout entier $k \in \{1, ..., n\}$, déterminer $\mathbb{P}([G_2 = a - k])$.

- **1 pt**

2. Vérifier : $\mathbb{P}([G_2 = -n]) = \dfrac{n-1}{2(2n-1)}$.

- **1 pt : support**
- **1 pt : SCE associé à G_2**
- **2 pts : calcul**

3. Montrer : $\mathbb{E}(G_2) = \dfrac{3(3n-1)a - \left(7n^2-1\right)}{6(2n-1)}$.

- **1 pt : existence espérance**
- **3 pts : calcul**

Partie III : Comparaison des deux protocoles /3

On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$). Déterminer, selon les valeurs de a, le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.

- **3 pts (dont 1 pour l'application de $n = 16$)**

IV. Problème (EDHEC 2005) /62

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O.
Au départ, le mobile est à l'origine.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.
On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $[T = k]$ en fonction d'évènements mettant en jeu certaines des variables X_i.

- **3 pts (2 pts pour l'intersection même sans justification, 1 pt pour le cas $[T = 1]$)**

b) Donner la loi de X_1.

- **1 pt : support**
- **1 pt : loi**

c) En déduire $\mathbb{P}([T = k])$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T.

- **1 pt : écriture correcte FPC**
- **1 pt : simplification des proba conditionnelles**
- **1 pt : calul $\mathbb{P}([T = k])$**
- **1 pt : loi géométrique**

2. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité (1pt pour le cas $k \in [\![1, n]\!]$ et 1 pt pour le cas $k = 0$)**

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'évènements $([X_{n-1} = k])_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ pour montrer que : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$.

- **1 pt : FPT**
- **1 pt : $\mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \neq 0$ (pour y avoir pensé)**
- **1 pt : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) = 1$**

3. a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1, 2, \dots n+1\},\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p\, \mathbb{P}([X_n = k-1])$.

- **2 pts : égalité entre événements (1 pt si non justifié)**
- **1 pt : proba conditionnelle**

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{0, 1, 2 \dots, n-1\},\ \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k (1-p)$.
En déduire également la valeur de $\mathbb{P}([X_n = n])$.
Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

- **1 pt : récurrence bien posée**

– **1 pt : initialisation**
– **3 pts : hérédité (dont 1 pour le cas $k = 0$)**
– **2 pts : récurrence immédiate**
– **1 pt : explication**

c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$.

– **1 pt : séparer le cas $k = n$**
– **1 pt : $p \neq 1$**
– **1 pt : formule de la somme géométrique**

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.
On rappelle que `grand(1,1,'uin',0,2)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = input(' Entrez un entier naturel n : ')
X = 0
for k = 1:n
    u = grand(1,1,'uin',0,2)
    if u == 2 then
        X = ...........
    else
        X = ...........
    end
end
disp(X)
```

– **2 pts (1 par ligne à remplir, même sans justification)**

5. *a)* Montrer que : $\forall n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

– **1 pt : initialisation**
– **2 pts : hérédité**

b) En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{p\,(1-p^n)}{1-p}$.

– **1 pt : existence espérance**
– **1 pt : découpage de la somme**
– **2 pts : calcul**

6. *a)* Montrer, en utilisant la question 3a), que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) = p\left(\mathbb{E}\left(X_n^2\right) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1\right)$.

– **1 pt : existence espérance**
– **1 pt : théorème de transfert**
– **2 pts : calcul**

b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + (2n-1)\,\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$.

Montrer que $u_{n+1} = p\ u_n + \dfrac{p\,(1+p)}{1-p}$.

- **1 pt : utilisation question précédente**
- **2 pts : calcul**

c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $\mathbb{E}\left(X_n^2\right)$ en fonction de p et n.

- **1 pt : point fixe**
- **1 pt : suite géométrique**
- **1 pt :** u_0
- **1 pt : expression de** u_n
- **2 pts : expression** $\mathbb{E}(X_n^2)$

d) Montrer enfin que : $\mathbb{V}\left(X_n\right) = \dfrac{p}{(1-p)^2}\left(1-(2n+1)\,p^n\,(1-p) - p^{2n+1}\right)$.

- **1 pt : existence variance**
- **2 pts : calcul (dont 1 pt pour la formule de la variance)**

7. Dans cette question, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.

a) En s'inspirant du programme de la question *4.*, écrire en **Scilab** une fonction `TrajectoireX` prenant en paramètre un entier `n` et calculant en sortie un vecteur `T` contenant les `n` premières abscisses du mobile.

- **3 pts : fonction, initialisation, modification vecteur**

b) On considère le programme **Scilab** suivant :

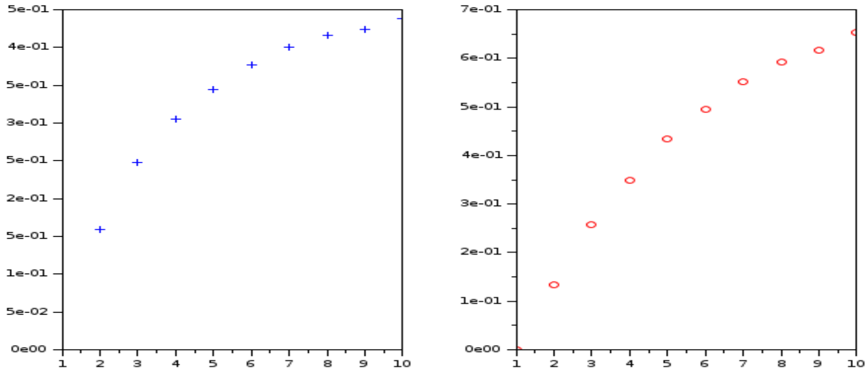
```
n = input('Entrez un entier n : ')
N = 1000
T = zeros(N,n)
for i = 1:N
    T(i,:) = TrajectoireX(n)
end
E = zeros(1,n)
V = zeros(1,n)
for k = 1:n
    E(k) = mean(T(:,1:k))
    V(k) = variance(T(:,1:k))
end
subplot(1,2,1), plot(E,'+')
subplot(1,2,2), plot(V,'or')
```

Que représentent les vecteurs `E` et `V` ?

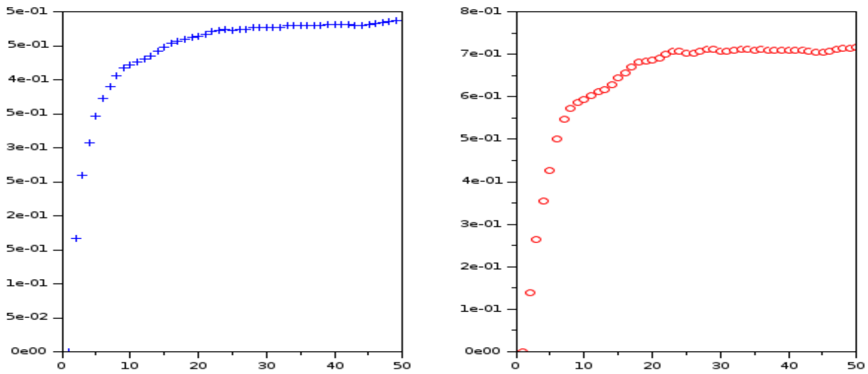
- **2 pts : 1 pt pour `E`, 1 pt pour `V`**

c) Le programme précédent nous permet d'obtenir les graphiques suivants pour différentes valeurs de `n` :

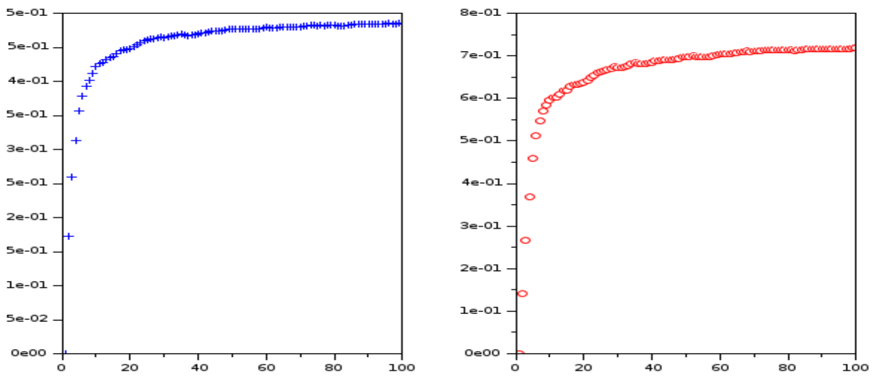
`n`$=10$



`n`$=50$



`n`$=100$



Expliquer ces graphiques à l'aide des questions ***5.*** et ***6.***.

– **3 pts : dont** 1 **pour la loi faible des grands nombres et** 1 **pour la limite quand** n **tend vers** $+\infty$