DS2 (version B)

I. Exercice 1

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2

- On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
- On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Calculer AFA, AGA, AHA.

2. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de $\mathcal{S}_2$.
Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_2$.

On note u l'application qui, à chaque matrice S de $\mathcal{S}_2$, associe la matrice $u(S) = ASA$.

3. ***a)*** Montrer : $\forall s \in \mathcal{S}_2,\ u(S) \in \mathcal{S}_2$.

b) Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_2$.

c) Donner la matrice de u dans la base (F, G, H) de $\mathcal{S}_2$.

Partie 2 : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3

On note : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que -4, 1, 16 sont valeurs propres de M et déterminer, pour chacune de celles-ci, une base du sous-espace propre associé. Est-ce que M est diagonalisable ?

2. Déterminer une matrice P carrée d'ordre 3, inversible, de première ligne égale à $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, telle que $M = PDP^{-1}$.

3. Vérifier que $(D + 4I)(D - I)(D - 16I)$ est la matrice nulle.

4. En déduire : $\quad M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.

5. Établir : $u^3 = 13u^2 + 52u - 64e$, où e désigne l'application indentité de $\mathcal{S}_2$ et où u a été définie dans la partie I.

II. Exercice 2 `EDHEC 2010`

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod\limits_{k=0}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
u_0 &= \prod_{k=0}^{0}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = 1 + \frac{1}{2^0} = 1 + \frac{1}{1} = 1+1 = 2 \\
u_1 &= \prod_{k=0}^{1}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \left(1+\frac{1}{2^0}\right)\left(1+\frac{1}{2^1}\right) = 2\left(1+\frac{1}{2}\right) = \cancel{2}\,\frac{3}{\cancel{2}} = 3 \\
u_2 &= \prod_{k=0}^{2}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \left(1+\frac{1}{2^0}\right)\left(1+\frac{1}{2^1}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right) = 3\left(1+\frac{1}{4}\right) = 3\,\frac{5}{4} = \frac{15}{4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{u_0 = 2,\ u_1 = 3 \text{ et } u_2 = \frac{15}{4}.}$$

□

2. ***a)*** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 2$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \left(1+\frac{1}{2^0}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = 2\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$$

Or, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $1 + \dfrac{1}{2^k} \geqslant 1$. Donc : $\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{2^k}\right) \geqslant 1$. Donc :

$$u_n = 2\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \geqslant 2 \times 1 = 2$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 2.}$$

Remarque
On pouvait aussi résoudre cette question grâce à une récurrence.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \geqslant 2$.

- **Initialisation** :
  $u_0 = 2 \geqslant 2$.
  Donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \geqslant 2$).

$$u_{n+1} = \prod_{k=0}^{n+1}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \times \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) = u_n \times \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

  Par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant 2$, donc :

$$u_{n+1} \geqslant 2\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) \geqslant 2 \times 1 = 2$$

  D'om $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$.

□

b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Remarquons tout d'abord que :

$$u_{n+1} = \prod_{k=0}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) u_n}$$

- Étudions les variations de la suite (u_n).
  D'après la question ***2.a)***, $u_n \geqslant 2$. Donc, en particulier, $u_n \neq 0$.

  On peut alors écrire :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cancel{u_n}}{\cancel{u_n}} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \geqslant 1$$

  Enfin, comme $u_n > 0$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \ \Leftrightarrow\ u_{n+1} \geqslant u_n$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

□

c) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$.

Démonstration.

- Notons $f : x \mapsto \ln(1+x)$.
  La fonction f est C^2 sur $]-1, +\infty[$ comme composée $h \circ g$ de :
  × $h : x \mapsto 1 + x$ C^2 sur $]-1, +\infty[$ comme fonction polynomiale,
    et telle que : $h(]-1, +\infty[) =]0, +\infty[$.
  × $g : y \mapsto \ln(y)$ C^2 sur $]0, +\infty[$.
- Soit $x > -1$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$$

  Ainsi, f est concave sur $]-1, +\infty[$.
- Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ de f est située, en tout point, sous ses tangentes.
  En particulier, $\mathcal{C}_f$ est située sous sa tangente en 0, droite d'équation :

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = x$$

$$\boxed{\forall x > -1,\ \ln(x+1) \leqslant x}$$

Remarque

- L'égalité de l'énoncé propose de comparer une quantité en x à un polynôme de degré 1. Il faut donc comprendre que l'on compare les positions de la courbe d'une fonction et d'une droite. Il est donc naturel de penser à une inégalité de convexité.
- Il était aussi possible de résoudre cette question en étudiant de la fonction $g : x \mapsto x - \ln(x+1)$. Il s'agit alors de dresser son tableau de variation et de montrer que : $\forall x > 1,\ g(x) \geqslant 0$.
  Cette solution moins astucieuse et rapide a le mérite de toujours fonctionner.
  Il faut donc s'assurer de savoir procéder ainsi.

□

d) En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Remarquons tout d'bord que :

$$\ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$$

- Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En appliquant l'inégalité de la question ***2.c)*** à $\frac{1}{2^k} > -1$, on obtient :

$$\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

- En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) \leqslant 2$$

car $1 - \dfrac{1}{2^{n+1}} \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{La suite } (\ln(u_n)) \text{ est majorée par 2.}}$$

□

3. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in \left[2, \mathrm{e}^2\right]$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rll} & \ln(u_n) \leqslant 2 & \\ \text{donc} & u_n \leqslant \mathrm{e}^2 & \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto e^x\textit{)} \end{array}$$

- Ainsi, la suite (u_n) est :
  × croissante d'après la question ***2.b)***,
  × majorée par 2.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ converge vers } \ell \leqslant \mathrm{e}^2.}$$

- D'après la question ***2.a)***, $u_n \geqslant 2$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2$$

Par passage à la limite, on obtient : $2 \leqslant \ell \leqslant \mathrm{e}^2$.

$$\boxed{\ell \in [2, \mathrm{e}^2]}$$

□

4. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{2^k}\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On sait que :
  - $\times$ la suite (u_n) est convergente de limite ℓ,
  - $\times$ la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $[2, e^2]$, donc en particulier est continue en $\ell \in [2, e^2]$.

  On en déduit que la suite $(\ln(u_n))$ est convergente et de limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln(\ell)$$

- Cette limite s'écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$$

$$\boxed{\text{En combinant ces résultats, on obtient : } \ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right).}$$

□

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{2^k}\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) &= \ln(\ell) - \ln(u_n) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) - \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \\
&= \left(\cancel{\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\right) - \cancel{\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)} \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)}$$

□

c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question ***2.c)***, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Pour tout $k \geqslant n+1$, $\dfrac{1}{2^k} \geqslant 0$, donc $\dfrac{1}{2^k} + 1 \geqslant 1$ et ainsi : $\ln\left(1 + \dfrac{1}{2^k}\right) \geqslant 0$.
  On en déduit que :
  $$\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \geqslant 0$$
  comme somme d'éléments positifs.
- Par ailleurs, on a démontré en ***2.d)*** que pour tout $k \geqslant n+1$: $\ln\left(1 + \dfrac{1}{2^k}\right) \leqslant \dfrac{1}{2^k} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.
  On en déduit que :
  $$\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$
  Or :
  $$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}.}$$

□

d) Déduire de la question précédente que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question précédente :

$$\begin{array}{lccccl} & 0 & \leqslant & \ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) & \leqslant & \dfrac{1}{2^n} & \\ \text{donc} & 1 = e^0 & \leqslant & \dfrac{\ell}{u_n} & \leqslant & e^{\frac{1}{2^n}} & \textit{(car } x \mapsto e^x \textit{ est croissante)} \\ \text{et} & 1 & \geqslant & \dfrac{u_n}{\ell} & \geqslant & e^{-\frac{1}{2^n}} & \textit{(car } x \mapsto \frac{1}{x} \textit{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ \text{ainsi} & \ell & \geqslant & u_n & \geqslant & \ell\, e^{-\frac{1}{2^n}} & \textit{(car } \ell \geqslant 0\textit{)} \\ \text{d'où} & -\ell & \leqslant & -u_n & \leqslant & -\ell\, e^{-\frac{1}{2^n}} & \\ \text{enfin} & 0 & \leqslant & \ell - u_n & \leqslant & \ell - \ell\, e^{-\frac{1}{2^n}} = \ell\left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right) & \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right)}$$

□

e) Justifier que, pour tout réel x, on a $1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant x$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \dfrac{\ell}{2^n}$.
Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

Démonstration.

- Notons $f : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-x}$.
  La fonction f est C^2 sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions C^2 sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  $$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad f''(x) = -\mathrm{e}^{-x} < 0$$
  Ainsi, f est concave sur $\mathbb{R}$.
- Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ de f est située, en tout point, sous ses tangentes.
  En particulier, $\mathcal{C}_f$ est située sous sa tangente en 0, droite d'équation :
  $$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = x$$
  $$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant x.}$$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'inégalité précédente appliquée à $x = \dfrac{1}{2^n} \in \mathbb{R}$, on obtient :
  $$1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}} \leqslant \frac{1}{2^n}$$
  et ainsi, d'après la question précédente :
  $$\ell - u_n \leqslant \ell \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right) \leqslant \ell \ \frac{1}{2^n}$$
  $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{\ell}{2^n}}$$
- Finalement, on sait que :
  × $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \dfrac{\ell}{2^n}$,
  × la série $\sum \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ est convergente car c'est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ avec $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$.
  Il en est de même de la série $\sum \dfrac{\ell}{2^n}$ *(on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par $\ell \neq 0$).*

  D'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum (\ell - u_n)$ converge.
  $$\boxed{\sum (\ell - u_n) \text{ est une série convergente.}}$$

□

5. Écrire en **Scilab** une fonction `SuiteU` prenant en paramètre un entier `n` et calculant en sortie le terme $u_{\mathtt{n}}$.

Démonstration.

```
function u = SuiteU(n)
    u = 2
    for k = 2:n
        u = u * (1 + 1/2 ^ k)
    end
endfunction
```

□

6. a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\ell - u_n| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^2}{2^n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Remarquons tout d'abord que d'après la question ***4.e)*** : $u_n - \ell \geqslant 0$.
  Ainsi : $|u_n - \ell| = u_n - \ell$.
- D'après la question ***3.***, $\ell \leqslant \mathrm{e}^2$. Ainsi, toujours d'après la question ***4.e)*** :

$$0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{\ell}{2^n} \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{2^n}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |\ell - u_n| \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{u_n}}$$

□

b) Déterminer un entier N tel que : $\forall n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-3}$.

Démonstration.

- Il suffit de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$:

$$\frac{\mathrm{e}^2}{2^n} \ \leqslant\ 10^{-3}$$

  car alors, par transitivité, on aura :

$$|\ell - u_n| \ \leqslant\ \frac{\mathrm{e}^2}{2^n} \ \leqslant\ 10^{-3}$$

- Or :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^2}{2^n} \leqslant 10^{-3} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2^n}{\mathrm{e}^2} \geqslant 10^3 && \textit{(car } x \mapsto \tfrac{1}{x} \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \quad 2^n \geqslant 10^3\ \mathrm{e}^2 && \textit{(car } \mathrm{e}^2 > 0\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \quad n\ln(2) \geqslant \ln(10^3) + \ln(\mathrm{e}^2) && \textit{(car } x \mapsto \ln(x) \textit{ est strictement croissante)} \\
&\Leftrightarrow \quad n\ln(2) \geqslant 3\ln(10) + 2 && \\
&\Leftrightarrow \quad n \geqslant \frac{3\ln(10)+2}{\ln(2)} && \textit{(car } \ln(2) > 0\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'entier } N = \left\lceil \frac{3\ln(10)+2}{\ln(2)} \right\rceil \text{ convient.}}$$

□

c) Déduire de cet encadrement un programme **Scilab** permettant de déterminer une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près. *On pourra utiliser la fonction* `SuiteU`.

Démonstration.

```
N = ceil((2 + 3 * log(10)) / log(2))
u = SuiteU(N)
disp(u)
```

□

III. Exercice 3 (EML 2000)

Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges, et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

Partie I : Premier protocole

Les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon alétoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $\mathbb{E}(X)$ son espérance.

1. Montrer : $\forall k \in \{1, ..., 2n-1\}, \mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, 2n-1]\!]$.

- Un k-tirage réalisant l'événement $[X = k]$ est entièrement déterminé par :
  × la carte obtenue au 1^{er} tirage : $\dbinom{2n-2}{1} = 2n-2$ choix,
  (on tire une des $2n-2$ cartes qui ne sont pas des rois rouges)
  × la carte obtenue au $2^{\text{ème}}$ tirage : $\dbinom{2n-3}{1} = 2n-3$ choix,
  (on tire une des $2n-3$ cartes restantes)
  × $\cdots$
  × la carte obtenue au $(k-1)^{\text{ème}}$ tirage : $\dbinom{2n-(k-1)-1}{1} = 2n-(k-1)-1 = 2n-k$ choix,
  × la carte obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage : 2.
  (on tire l'un des 2 rois rouges)
- Notons Ω' l'ensemble des k-tirages.
  Alors $\text{Card}(\Omega') = 2n \times (2n-1) \times \cdots \times (2n-k+1)$.
  Finalement on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = k]) &= \frac{\text{Card}([X = k])}{\text{Card}(\Omega')} = \frac{\cancel{(2n-2)} \cdots \cancel{(2n-k+1)}(2n-k)2}{2n(2n-1)\cancel{(2n-2)} \cdots \cancel{(2n-k+1)}} \\ &= \frac{(2n-k)\cancel{2}}{\cancel{2}n(2n-1)} = \frac{2n-k}{2n(2n-1)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![1, 2n-1]\!], \mathbb{P}([X = k]) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}}$$

Remarque
Il était aussi possible d'utiliser la formule des probabilités composées.
Pour ce faire, il faut prendre l'initiative d'introduire des événements.

- Pour tout $i \in [\![1, 2n]\!]$, notons R_i l'événement R_i : « on a tiré un roi rouge lors du $i^{\text{ème}}$ tirage ».
  Ainsi $\overline{R_i}$: « on a tiré une carte autre qu'un roi rouge lors du $i^{\text{ème}}$ tirage ».
  On a alors :
$$[X = k] = \overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-1}} \cap R_k$$
- On en déduit, par la formule des probabilités composées, et sous réserve de l'existence des probabilités conditionnelles entrant en jeu :

$$\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}(\overline{R_1}) \times \mathbb{P}_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) \times \ldots \times \mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-2}}}(\overline{R_{k-1}}) \times \mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-1}}}(R_k)$$

- Or, pour tout $j \in [\![1, k-1]\!]$: $\mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{j-1}}}(\overline{R_j}) = \dfrac{2n-2-(j-1)}{2n-(j-1)} = \dfrac{2n-1-j}{2n+1-j}$.
  En effet, avant la découverte de la $j^{\text{ème}}$ carte, on a tiré $j-1$ cartes (aucun roi rouge) et il reste donc $2n-(j-1)$ cartes dans le paquet dont $2n-2-(j-1)$ qui ne sont pas des rois rouges.
- Et $\mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-1}}}(R_k) = \dfrac{2}{2n-(k-1)} = \dfrac{2}{2n+1-k}$.
  En effet, avant la découverte de la $k^{\text{ème}}$ carte, on a tiré $k-1$ cartes et il reste donc $2n-(k-1)$ cartes dans le paquet dont 2 qui sont des rois rouges.
- On en déduit que :

$$\mathbb{P}([X=k]) \;=\; \frac{\cancel{2n-2}}{2n}\;\frac{\cancel{2n-3}}{2n-1}\;\frac{\cancel{2n-4}}{\cancel{2n-2}}\;\cdots\;\frac{\cancel{2n+1-k}}{\cancel{2n+3-k}}\;\frac{2n-k}{\cancel{2n+2-k}}\;\frac{2}{\cancel{2n+1-k}}$$

□

2. Montrer : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{2n+1}{3}$.

On rappelle que pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, on a : $\sum\limits_{k=1}^{p} k^2 = \dfrac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.

Démonstration.
Remarquons que $X(\Omega) = [\![1, 2n-1]\!]$. En effet :
- × on peut obtenir un roi rouge dès la première carte,
- × comme le jeu contient 2 rois rouges et $2n$ cartes, on obtient le premier roi rouge au plus tard au $(2n-1)^{\text{ème}}$ tirage,
- × on peut tirer le premier roi rouge dans chaque tirage intermédiaire.

Ainsi X est une variable aléatoire finie.

$$\boxed{X \text{ admet donc une espérance.}}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{2n-1} k\, \mathbb{P}([X=k]) = \sum_{k=1}^{2n-1} k\, \frac{2n-k}{n(2n-1)} \\
&= \frac{1}{n(2n-1)} \sum_{k=1}^{2n-1} k(2n-k) \\
&= \frac{1}{n(2n-1)} \sum_{k=1}^{2n-1} (2nk-k^2) \\
&= \frac{1}{n(2n-1)} \left(2n \sum_{k=1}^{2n-1} k - \sum_{k=1}^{2n-1} k^2 \right) \\
&= \frac{1}{n(2n-1)} \left(2n\, \frac{(2n-1)(2n)}{2} - \frac{(2n-1)(2n)(2\,(2n-1)+1)}{6} \right) \\
&= \frac{(2n-1)(2n)}{n(2n-1)} \left(2n\, \frac{1}{2} - \frac{(2\,(2n-1)+1)}{6} \right) \\
&= 2\left(2n\, \frac{1}{2} - \frac{4n-1}{6} \right) \;=\; \frac{2}{6}\,(6n-(4n-1)) \\
&= \frac{2n+1}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{2n+1}{3}}$$

□

3. Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs losqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte, G_1 est égale à $a - k$.
Déterminer l'espérance de la variable aléatoire G_1.

Démonstration.

- Par définition de G_1, on a
$$G_1 = a - X$$
- Ainsi, la v.a.r. G_1 admet une espérance en tant que somme de v.a.r. admettant une espérance.
De plus, par linéarité de l'espérance :
$$\mathbb{E}(G_1) = \mathbb{E}(a - X) = a - \mathbb{E}(X) = a - \frac{2n+1}{3}$$
$$\boxed{\mathbb{E}(G_1) = a - \frac{2n+1}{3}}$$

Remarque
Si on ne repère pas la relation $G_1 = a - X$, on peut toujours résoudre cette question en déterminant la loi de G_1.

- Déterminons la loi de G_1.
  - $G_1(\Omega) = \{a - k \ / \ k \in [\![1, 2n-1]\!]\}$ puisque le premier rouge peut être découvert entre le 1^{er} et le $(2n-1)^{\text{ème}}$ tirage.
  - Soit $k \in [\![1, 2n-1]\!]$.
  Comme : $[G_1 = a - k] = [X = k]$, on a, d'après la question ***1.*** :
  $$\mathbb{P}([G_1 = a - k]) = \mathbb{P}([X = k]) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}$$
- G_1 est une variable aléatoire finie. Donc elle admet une espérance.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(G_1) & = & \sum\limits_{k=1}^{2n-1} (a-k)\ \mathbb{P}([G_1 = a-k]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{2n-1} (a-k)\ \mathbb{P}([X = k]) & \textit{(car } [G_1 = a-k] = [X=k]\textit{)} \\
& = & a \sum\limits_{k=1}^{2n-1} \mathbb{P}([X = k]) - \sum\limits_{k=1}^{2n-1} k\ \mathbb{P}([X=k]) & \\
& = & a - \mathbb{E}(X) & \textit{(car } ([X=k])_{k\in[\![1,2n-1]\!]} \textit{ est un sce)}
\end{array}$$

□

Partie II : Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes. Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs lorsqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ème}}$ carte découverte ($k \leqslant n$), G_2 est égale à $a-k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

1. Pour tout entier $k \in \{1, ..., n\}$, déterminer $\mathbb{P}\left([G_2 = a-k]\right)$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
On remarque que $[G_2 = a-k] = [X = k]$. On en déduit :

$$\mathbb{P}([G_2 = a-k]) = \mathbb{P}([X = k]) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}([G_2 = a-k]) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}}$$

□

2. Vérifier : $\mathbb{P}\left([G_2 = -n]\right) = \dfrac{n-1}{2\,(2n-1)}$.

Démonstration.

- On remarque que : $G_2(\Omega) = \{a-k \ / \ k \in [\![1, n]\!]\} \cup \{-n\}$.
  En effet, le 1er roi rouge peut être tiré entre le 1er et le $n^{\text{ème}}$ tirage, ou ne jamais être tirée.
- La famille $([G_2 = a-1], [G_2 = a-2], \dots, [G_2 = a-n], [G_2 = -n])$ est le système complet d'événements associé à G_2.
  On en déduit que : $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([G_2 = a-k]) + \mathbb{P}([G_2 = -n]) = 1$. Ou encore :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([G_2 = -n]) &= 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([G_2 = a-k]) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{2n-k}{n(2n-1)} \\
&= 1 - \frac{1}{n(2n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n} (2n-k) \right) \\
&= 1 - \frac{1}{n(2n-1)} \left(2n \sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} k \right) \\
&= 1 - \frac{1}{n(2n-1)} \left(2n\ n - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= 1 - \frac{n}{2n(2n-1)} \left(4n - (n+1) \right) \\
&= 1 - \frac{1}{2(2n-1)} (3n-1) \\
&= \frac{(4n-2)-(3n-1)}{2(2n-1)} = \frac{n-1}{2(2n-1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([G_2 = -n]) = \frac{n-1}{2(2n-1)}}$$

□

3. Montrer : $\mathbb{E}(G_2) = \dfrac{3(3n-1)a - \big(7n^2-1\big)}{6(2n-1)}$.

Démonstration.

- G_2 est une v.a.r. finie, donc elle admet une espérance.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G_2) &= \sum_{k=1}^{n} (a-k)\ \mathbb{P}([G_2 = a-k]) + (-n)\ \mathbb{P}([G_2=-n]) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} (a-k)\frac{2n-k}{n(2n-1)}\right) - n\frac{n-1}{2(2n-1)} \\
&= \frac{1}{n(2n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n} (a-k)(2n-k)\right) - n\frac{n-1}{2(2n-1)}
\end{aligned}$$

- Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (a-k)(2n-k) &= \sum_{k=1}^{n} (2an - (a+2n)k + k^2) \\
&= 2an \sum_{k=1}^{n} 1 - (a+2n) \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= 2an\ n - (a+2n)\ \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= 2an^2 + \frac{n(n+1)}{6}\left(-3\ (a+2n) + (2n+1)\right) \\
&= 2an^2 + \frac{n(n+1)}{6}\left(-3a-4n+1\right) \\
&= \frac{n}{6}\left(12an + (n+1)(-3a-4n+1)\right) \\
&= \frac{n}{6}\big(12an - 3an - 4n^2 + n - 3a - 4n + 1\big) \\
&= \frac{n}{6}\big(9an - 3a - 3n + 1 - 4n^2\big) \\
&= \frac{n}{6}\big(3a\ (3n-1) + 1 - 3n - 4n^2\big)
\end{aligned}$$

- En combinant ces résultats, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G_2) &= \frac{1}{n(2n-1)}\left(\frac{n}{6}\big(3a\ (3n-1) + 1 - 3n - 4n^2\big)\right) - n\frac{n-1}{2(2n-1)} \\
&= \frac{n}{6n(2n-1)}\Big(\big(3a\ (3n-1) + 1 - 3n - 4n^2\big) - 3n(n-1)\Big) \\
&= \frac{1}{6(2n-1)}\big(3a\ (3n-1) + 1 - 7n^2\big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(G_2) = \frac{3(3n-1)a - (7n^2-1)}{6(2n-1)}}$$

□

Partie III : Comparaison des deux protocoles

On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$). Déterminer, selon les valeurs de a, le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.

Démonstration.
On cherche à déterminer le protocole donnant l'espérance de gain la plus élevée.
On cherche donc à comparer $\mathbb{E}(G_1)$ et $E(G_2)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G_1) \leqslant \mathbb{E}(G_2) \quad & \Leftrightarrow \quad a - \frac{2n+1}{3} \leqslant \frac{3(3n-1)a - (7n^2-1)}{6(2n-1)} \\
& \Leftrightarrow \quad 6(2n-1)a - 2(2n-1)(2n+1) \leqslant 3(3n-1)a - (7n^2-1) \quad \textit{(car } 6(2n-1) > 0\textit{)} \\
& \Leftrightarrow \quad (12n - 6 - 9n + 3)a \leqslant 8n^2 - 2 - 7n^2 + 1 \\
& \Leftrightarrow \quad (3n-3)a \leqslant n^2 - 1 \\
& \Leftrightarrow \quad a \leqslant \frac{(n+1)\cancel{(n-1)}}{3\cancel{(n-1)}} \quad \textit{(car } n = 16, \textit{ donc } n-1 > 0\textit{)} \\
& \Leftrightarrow \quad a \leqslant \frac{n+1}{3} = \frac{17}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Si } a > \dfrac{17}{3}, \text{ le protocole 1 est le plus favorable au joueur.} \\ \text{Si } a < \dfrac{17}{3}, \text{ le protocole 2 est le plus favorable au joueur.} \\ \text{Si } a = \dfrac{17}{3}, \text{ les deux se valent.} \end{array}}$$

□

IV. Problème (EDHEC 2005)

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O.
Au départ, le mobile est à l'origine.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.
On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $[T = k]$ en fonction d'évènements mettant en jeu certaines des variables X_i.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- L'événement $[T = k]$ est réalisé si le mobile revient en 0 pour la première fois à l'instant k. Cela signifie qu'entre l'instant 0 et l'instant $k-1$, le mobile n'est pas revenu en 0. Il a donc avancé d'une position à chacun de ces instants. Ainsi :
  - × le mobile se trouve en position 1 à l'instant 1.
  - × le mobile se trouve en position 2 à l'instant 2.
  - × ...
  - × le mobile se trouve en position $k-1$ à l'instant $k-1$.
  - × le mobile se trouve en position 0 à l'instant k.

$$\boxed{[T = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i = i] \right) \cap [X_k = 0]}$$

- Afin de lever toute ambiguïté, précisons cette formule lorsque $k = 1$.

$$\boxed{[T = 1] = [X_1 = 0]}$$

(le mobile revient à la position 0 *dès l'instant* 1*)* □

b) Donner la loi de X_1.

Démonstration.

- $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$. En effet, entre l'instant 0 et l'instant 1 :
  - × soit le mobile a avancé d'une position et se trouve donc en position 1.
  - × soit le mobile est resté sur le point origine.
- D'après l'énoncé, on a de plus :

$$\mathbb{P}([X_1 = 0]) = 1 - p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_1 = 1]) = p$$

$$\boxed{\text{On en conclut que : } X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p).}$$

□

c) En déduire $\mathbb{P}([T = k])$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***1.a)*** :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([T = k]) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i = i]\right) \cap [X_k = 0]\right) \\ &= \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap \ldots \cap [X_{k-1} = k-1] \cap [X_k = 0])\end{aligned}$$

- On en déduit, par la formule des probabilités composées, et sous réserve de l'existence des probabilités conditionnelles entrant en jeu :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}([T = k]) \\ =\ &\mathbb{P}([X_1 = 1]) \times \ldots \times \mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{k-2}=k-2]}([X_{k-1} = k-1]) \times \mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{k-1}=k-1]}([X_k = 0])\end{aligned}$$

- La position du mobile à un instant $j \geqslant 2$ ne dépendant que de sa position à l'instant précédent, on obtient :

$$\mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{j-1}=j-1]}([X_j = j]) \ = \ \mathbb{P}_{[X_{j-1}=j-1]}([X_j = j]) = p$$

  et :

$$\mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{k-1}=k-1]}([X_k = 0]) \ = \ \mathbb{P}_{[X_{k-1}=k-1]}([X_k = 0]) = 1 - p$$

  ce qui permet de lever la réserve précédente.

- On en conclut :

$$\boxed{\mathbb{P}([T = k]) = p \times \ldots \times p \times (1-p) = p^{k-1}}$$

- Remarquons alors que : $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
  (le mobile peut revenir, pour la première fois en position 0 à n'importe quel instant)
  On peut donc en conclure, grâce au calcul de probabilité précédent que :

$$\boxed{T \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p)}$$

□

2. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

▶ **Initialisation** :
D'après l'énoncé, $X_0 = 0$. Ainsi : $X_0(\Omega) = \{0\} = [\![0, 0]\!]$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.

▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $X_{n+1}(\Omega) = [\![0, n+1]\!]$).
D'après l'hypothèse de récurrence, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Autrement dit, le mobile peut se trouver à n'importe quelle position $k \in [\![0, n]\!]$ à l'instant n. Deux cas se présentent alors :

× soit le mobile se déplace en avant et ainsi le mobile se retrouve en position $k+1\ in [\![1, n+1]\!]$.

× soit le mobile revient en position 0.

Ainsi : $X_{n+1}(\Omega) = [\![0, n+1]\!]$.
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ X_n(\Omega) = [\![0, n]\!].}$$

□

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'évènements $([X_{n-1} = k])_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ pour montrer que : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
D'après la question précédente, la famille $([X_{n-1} = k])_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est le système complet d'événements associé à X_{n-1}.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}([X_n = 0]) & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k] \cap [X_n = 0]) \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \times \mathbb{P}_{[X_{n-1}=k]}([X_n = 0]) \quad \textit{(car } \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \neq 0\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \times (1-p) \\
& = & (1-p) \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \\
& = & (1-p)
\end{array}$$

En effet, comme $([X_{n-1} = k])_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une système complet d'événements :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) = 1$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p.}$$

□

3. a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1, 2, \ldots n+1\},\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p\, \mathbb{P}([X_n = k-1])$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in [\![1, n+1]\!]$.

- Remarquons tout d'abord que :

$$[X_{n+1} = k] \ = \ [X_n = k-1] \cap [X_{n+1} = k]$$

  Le sens réciproque $(\supset)$ est évident.
  Le sens direct $(\subset)$ provient du fait que si le mobile se trouve en position k à l'instant $n+1$, il était forcément en position $k-1$ à l'instant précédent.

- On en déduit que :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X_{n+1} = k]) & = & \mathbb{P}([X_n = k-1] \cap [X_{n+1} = k]) & \\
& = & \mathbb{P}([X_n = k-1]) \times \mathbb{P}_{[X_n=k-1]}([X_{n+1} = k]) & \textit{(par la formule des probabilités composées)} \\
& = & \mathbb{P}([X_n = k-1]) \times p &
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![1, n+1]\!],\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p\, \mathbb{P}([X_n = k-1])}$$

□

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{0,1,2\ldots,n-1\}\ ,\ \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k\,(1-p)$.
En déduire également la valeur de $\mathbb{P}([X_n = n])$.
Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

Démonstration.

- Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$
  où $\mathcal{P}(n) : \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k\,(1-p)$.

  ▶ **Initialisation** :
  D'après la question ***2.b)*** : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.

  ▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p^k\,(1-p)$).
  Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Deux cas se présentent :

  × soit $k = 0$:
  D'une part : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 0]) = 1 - p$.
  D'autre part : $p^0\ (1-p) = 1 - p$.
  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est bien vérifiée dans ce cas.

  × soit $k \in [\![1, n]\!]$:
  D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) & = & p\ \mathbb{P}([X_n = k-1]) & \\ & = & p \times p^{k-1}(1-p) & \textit{(d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à } k-1 \in [\![0, n-1]\!]\textit{)} \\ & = & p^k(1-p) & \end{array}$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée dans ce cas.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k\,(1-p).}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le résultat de la question précédente appliqué à $k = n+1 \in [\![1, n+1]\!]$:

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = n+1]) = p\ \mathbb{P}([X_n = n])$$

  On peut alors, par une récurrence immédiate, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X_n = n]) = p^n$$

  En effet, la propriété est vérifiée au rang 0 (question ***2.b)***).
  Et si elle est vérifiée au rang n alors, d'après l'égalité ci-dessus :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = n+1]) = p\ \mathbb{P}([X_n = n]) = p\ p^n = p^{n+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X_n = n]) = p^n}$$

- Ce résultat s'explique par le fait que le seul n-déplacement réalisant $[X_n = n]$ est celui dans lequel le mobile ne fait qu'avancer. Chaque avancée se produisant avec probabilité p, un tel n-déplacement se déroule avec probabilité p^n.

□

c) Vérifier que $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left([X_n = k]\right) = 1$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les questions précédentes :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_n = k])\right) + \mathbb{P}([X_n = n]) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} p^k\ (1-p)\right) + p^n \\
&= (1-p)\ \left(\sum_{k=0}^{n-1} p^k\right) + p^n \\
&= \cancel{(1-p)}\ \frac{1-p^n}{\cancel{1-p}} + p^n \qquad \textit{(car } p \neq 1\textit{)} \\
&= 1 - p^n + p^n \ = \ 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left([X_n = k]\right) = 1}$$

□

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.
On rappelle que `grand(1,1,'uin',0,2)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = input(' Entrez un entier naturel n : ')
X = 0
for k = 1:n
    u = grand(1,1,'uin',0,2)
    if u == 2 then
        X = ............
    else
        X = ............
    end
end
disp(X)
```

Démonstration.

- D'après l'énoncé, le résultat affiché `X` est une valeur possible prise par X_n, obtenue par simulation.La variable `X` est initialisée à 0 (position de départ du mobile). Puis elle doit être mise à jour pour simuler un déplacement vers la droite (`X = X+1`) ou un retour à l'origine (`X = 0`).
- Si $p = \frac{1}{3}$, alors, à chaque instant n, le mobile se déplace vers la droite avec probabilité $\frac{1}{3}$ et revient en position 0 avec probabilité $\frac{2}{3}$.
- L'instruction `grand(1,1,'uin',0,2)` renvoie 0 avec probabilité $\frac{1}{3}$, 1 avec probabilité $\frac{1}{3}$ et 2 avec probabilité $\frac{1}{3}$. Ainsi, la probabilité d'obtenir soit 0 soit 1 est de $\frac{2}{3}$.

- L'ensemble des points précédents permet de compléter les lignes à trou :

```
6           X = X + 1
```

```
8           X = 0
```

□

5. *a)* Montrer que : $\forall n \geqslant 2, \quad \sum\limits_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \dfrac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \geqslant 2,\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \sum\limits_{k=1}^{n-1} k\ p^{k-1} = \dfrac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

▶ **Initialisation** :

- D'une part : $\sum\limits_{k=1}^{2-1} k\ p^{k-1} = \sum\limits_{k=1}^{1} k\ p^{k-1} = 1\ p^0 = 1$.
- D'autre part : $\dfrac{(2-1)\,p^2 - 2\,p^{2-1} + 1}{(1-p)^2} = \dfrac{p^2 - 2p + 1}{(1-p)^2} = \dfrac{(1-p)^2}{(1-p)^2} = 1$.

Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

▶ **Hérédité** : soit $n \geqslant 2$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(i.e.\ \sum\limits_{k=1}^{n} k\ p^{k-1} = \dfrac{n\ p^{n+1} - (n+1)\,p^n + 1}{(1-p)^2}\right)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\ p^{k-1} &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\ p^{k-1}\right) + n\ p^{n-1} \\
&= \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2} + n\ p^{n-1} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1 + n\ (1-p)^2\ p^{n-1}}{(1-p)^2} \\
&= \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1 + n\ (1-2p+p^2)\ p^{n-1}}{(1-p)^2} \\
&= \frac{(n-1)\,p^n - \cancel{n\,p^{n-1}} + 1 + \left(\cancel{n\,p^{n-1}} - 2\,n\,p^n + n\,p^{n+1}\right)}{(1-p)^2} \\
&= \frac{(n-1-2n)\,p^n + 1 + n\,p^{n+1}}{(1-p)^2} \\
&= \frac{n\,p^{n+1} - (n+1)\,p^n + 1}{(1-p)^2}
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \geqslant 2,\ \sum_{k=1}^{n-1} k\ p^{k-1} = \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}}$$

□

b) En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{p\,(1-p^n)}{1-p}$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- D'après la question ***2.a)***, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
  La v.a.r. X_n est donc finie. Ainsi, X_n admet une espérance.
- De plus, par définition :

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{E}(X_n) & \\ = & \displaystyle\sum_{k \in X_n(\Omega)} k\ \mathbb{P}([X_n = k]) & \\ = & \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\ \mathbb{P}([X_n = k])\right) + 0 \times \mathbb{P}([X_n = 0]) + n \times \mathbb{P}([X_n = n]) & \\ = & \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\ p^k\ (1-p)\right) + n\ p^n & \textit{(d'après les questions \textbf{2.b)}, \textbf{3.b)})} \\ = & (1-p)\ p\ \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\ p^{k-1}\right) + n\ p^n & \\ = & \cancel{(1-p)}\ p\ \dfrac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^{\cancel{2}}} + n\ p^n & \textit{(d'après la question précédente)} \\ = & p\ \left(\dfrac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1 + n\ (1-p)\ p^{n-1}}{1-p}\right) & \\ = & p\ \left(\dfrac{\cancel{np^n} - p^n - \cancel{n\,p^{n-1}} + 1 + \cancel{n\,p^{n-1}} - \cancel{np^n}}{1-p}\right) & \\ = & p\ \left(\dfrac{1-p^n}{1-p}\right) & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{p\,(1-p^n)}{1-p}}$$

□

6. a) Montrer, en utilisant la question 3a), que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) = p\left(\mathbb{E}\left(X_n^2\right) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Comme $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$, $X_n^2(\Omega) = \{k^2 \mid k \in [\![0, n]\!]\} \subset [\![0, n^2]\!]$.
  La v.a.r. X_n^2 est une v.a.r. finie. Ainsi, X_n^2 admet une espérance.
  Par le même raisonnement, la v.a.r. X_n^2 admet une espérance.

- D'après le théorème de transfert :

$$\begin{array}{rll}
& \mathbb{E}(X_{n+1}^2) & \\
= & \displaystyle\sum_{k \in X_{n+1}(\Omega)} k^2 \ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) & \\
= & \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k^2 \ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) & \\
= & \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) & \textit{(car } 0^2 \ \mathbb{P}([X_{n+1} = 0] = 0\textit{)} \\
= & \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \ p \ \mathbb{P}([X_n = k-1]) \ = \ p \sum_{k=1}^{n+1} k^2 \ \mathbb{P}([X_n = k-1]) & \textit{(d'après la question } \textbf{3.a)}\textit{)} \\
= & p \ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 \ \mathbb{P}([X_n = k]) & \textit{(par décalage d'indice)} \\
= & p \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \ \mathbb{P}([X_n = k]) + 2 \sum_{k=0}^{n} k \ \mathbb{P}([X_n = k]) + \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) \right) & \\
= & p \left(\mathbb{E}(X_n^2) + 2 \ \mathbb{E}(X_n) + 1 \right) & \begin{array}{l}\textit{(par théorème de transfert,} \\ \textit{par définition de l'espérance} \\ \textit{et par la question } \textbf{3.c)}\textit{)}\end{array}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathbb{E}(X_{n+1}^2) = p \left(\mathbb{E}(X_n^2) + 2 \ \mathbb{E}(X_n) + 1 \right)}$$

□

b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + (2n-1) \dfrac{p^{n+1}}{1-p}$.

Montrer que $u_{n+1} = p \ u_n + \dfrac{p\,(1+p)}{1-p}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Par définition de la suite (u_n) :

$$\begin{array}{rcll}
u_{n+1} & = & \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) + (2(n+1)-1) \dfrac{p^{n+2}}{1-p} & \\
& = & \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) + (2n+1) \dfrac{p^{n+2}}{1-p} & \\
& = & p \left(\mathbb{E}(X_n^2) + 2 \ \mathbb{E}(X_n) + 1 \right) + (2n+1) \dfrac{p^{n+2}}{1-p} & \begin{array}{l}\textit{(d'après la} \\ \textit{question précédente)}\end{array}
\end{array}$$

- D'autre part :

$$\begin{array}{rcl}
p \ u_n & = & p \ \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + p \ \ (2n-1) \dfrac{p^{n+1}}{1-p} \\
& = & p \ \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + (2n-1) \dfrac{p^{n+2}}{1-p}
\end{array}$$

- On obtient, par soustraction des deux lignes :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - p u_n &= \cancel{p\,\mathbb{E}(X_n^2)} - \cancel{p\,\mathbb{E}(X_n^2)} + 2p\,\mathbb{E}(X_n) + p + ((\cancel{2n}+1) - (\cancel{2n}-1))\frac{p^{n+2}}{1-p} \\
&= 2p\,\frac{p(1-p^n)}{1-p} + p + 2\,\frac{p^{n+2}}{1-p} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.b)}}\textit{)} \\
&= p\,\frac{2p(1-p^n)}{1-p} + p\,\frac{1-p}{1-p} + p\,\frac{2p^{n+1}}{1-p} \\
&= p\,\frac{2p(1-p^n) + (1-p) + 2p^{n+1}}{1-p} \\
&= p\,\frac{2p - \cancel{2p^{n+1}} + 1 - p + \cancel{2p^{n+1}}}{1-p} \\
&= p\,\frac{1+p}{1-p}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = p\,u_n + p\,\frac{1+p}{1-p}}$$

□

c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $\mathbb{E}\left(X_n^2\right)$ en fonction de p et n.

Démonstration.
D'après la formule trouvée dans la question précédente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

- L'équation de point fixe associée à la suite (u_n) est :

$$x = p\,x + \frac{p(1+p)}{1-p}$$

Elle admet pour unique solution : $\lambda = \dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2}$.

- On écrit :

$$\begin{array}{rcccccl}
u_{n+1} & = & p & \times & u_n & + & \dfrac{p(1+p)}{1-p} \quad (L_1) \\
\lambda & = & p & \times & \lambda & + & \dfrac{p(1+p)}{1-p} \quad (L_2) \\
\text{et donc} \quad u_{n+1} - \lambda & = & p & \times & (u_n - \lambda) & & \quad (L_1)\text{–}(L_2)
\end{array}$$

Notons alors (v_n) la suite de terme général $v_n = u_n - \lambda$.

- La suite (v_n) est géométrique de raison p.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = p^n \times v_0 = p^n \times (u_0 - \lambda)$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = v_n + \lambda = p^n \times (u_0 - \lambda) + \lambda$$

- Enfin : $u_0 = \mathbb{E}(X_0^2) + (2 \times 0 - 1)\dfrac{p^1}{1-p} = \mathbb{E}(0^2) - \dfrac{p}{1-p} = -\dfrac{p}{1-p}$.

- Ainsi : $u_0 - \lambda = -\dfrac{p}{1-p} - \dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2} = \dfrac{-p(1-p)-p(1+p)}{(1-p)^2} = -p\dfrac{1-\cancel{p}+1+\cancel{p}}{(1-p)^2} = \dfrac{-2p}{(1-p)^2}$.
- On en conclut :

$$\begin{aligned} u_n &= p^n\ \frac{-2p}{(1-p)^2} + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,(1+p-2p^n) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{p}{(1-p)^2}\,(1+p-2p^n)}$$

- Il reste à déterminer $\mathbb{E}(X_n^2)$. Par définition de u_n :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n^2) &= u_n - (2n-1)\ \frac{p^{n+1}}{1-p} \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,(1+p-2p^n) - (2n-1)\ \frac{p^{n+1}}{1-p} \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,(1+p-2p^n) - (2n-1)(1-p)\ p^n\ \frac{p}{(1-p)^2} \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,((1+p-2p^n) - (2n-1)(1-p)\ p^n) \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,((1+p-2p^n) - (2n-1)(1-p)\ p^n) \end{aligned}$$

- Enfin :

$$-(2n-1)(1-p) = (2n-1)(p-1) = 2np - 2n - p + 1 = (1-2n) + (2n-1)p$$

- On en conclut :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n^2) &= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p-2p^n+(1-2n)p^n+(2n-1)p^{n+1}\right) \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p+(-1-2n)p^n+(2n-1)p^{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n^2) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p-(1+2n)p^n+(2n-1)p^{n+1}\right)}$$

□

d) Montrer enfin que : $\mathbb{V}\,(X_n) = \dfrac{p}{(1-p)^2}\left(1-(2n+1)\,p^n\,(1-p)-p^{2n+1}\right)$.

Démonstration.

- On a déjà vu en question ***6.a)*** que la v.a.r. X_n admet un moment d'ordre 2. Ainsi X_n admet une variance.

- D'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_n) &= \mathbb{E}(X_n^2) - (\mathbb{E}(X_n))^2 \\
&= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p-(1+2n)p^n+(2n-1)p^{n+1}\right) - \left(\frac{p(1-p^n)}{1-p}\right)^2 \\
&= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p-(1+2n)p^n+(2n-1)p^{n+1}\right) - \frac{p}{(1-p)^2}\, p(1-p^n)^2 \\
&= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+\cancel{p}-(1+2n)p^n+(2n-1)p^{n+1} - p(\cancel{1}-2p^n+p^{2n})\right) \\
&= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1-(1+2n)p^n+(2n+1)p^{n+1} - p^{2n+1}\right) \\
&= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1-(2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1-(2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1}\right)}$$

$\square$

7. Dans cette question, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.

a) En s'inspirant du programme de la question *4.*, écrire en **Scilab** une fonction `TrajectoireX` prenant en paramètre un entier `n` et calculant en sortie un vecteur `T` contenant les `n` premières abscisses du mobile.

Démonstration.

```
function X = TrajectoireX(n)
    X = zeros(1,n)
    for k = 1:(n-1)
        u = grand(1,1,'uin',0,2)
        if u==2 then
            X(k+1) = X(k) + 1
        else
            X(k+1) = 0
        end
    end
endfunction
```

$\square$

b) On considère le programme **Scilab** suivant :

```
n = input('Entrez un entier n : ')
N = 1000
T = zeros(N,n)
for i = 1:N
    T(i,:) = TrajectoireX(n)
end
E = zeros(1,n)
V = zeros(1,n)
for k = 1:n
    E(k) = mean(T(:,1:k))
    V(k) = variance(T(:,1:k))
end
subplot(1,2,1), plot(E,'+')
subplot(1,2,2), plot(V,'or')
```

Que représentent les vecteurs `E` et `V` ?

Démonstration.

- Vecteur `E` :
  Le vecteur `E` est un vecteur à `n` coordonnées.
  Soit $k \in [\![1, \mathtt{n}]\!]$. La coordonnée $\mathtt{E}(k)$ est la moyenne empirique des `N` trajectoires du mobile, jusqu'à l'instant k.

  `E` représente donc une approximation de $\mathbb{E}(X_k)$.

- Vecteur `V` :
  Le vecteur `V` est un vecteur à `n` coordonnées.
  Soit $k \in [\![1, \mathtt{n}]\!]$. La coordonnée $\mathtt{V}(k)$ est la moyenne empirique des `N` trajectoires du mobile, jusqu'à l'instant k.

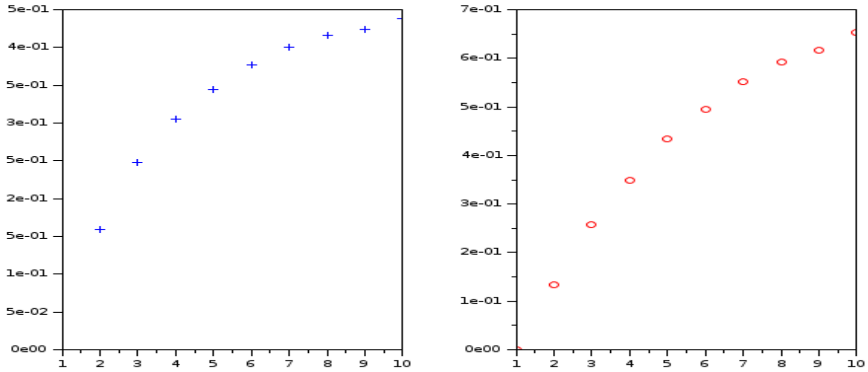
  `V` représente donc une approximation de $\mathbb{V}(X_k)$.

Remarque
Ce qui justifie le fait que la moyenne **empirique** des `N` trajectoires fournit bien une approximation de la moyenne **théorique** $\mathbb{E}(X_k)$, c'est la loi faible des grands nombres.

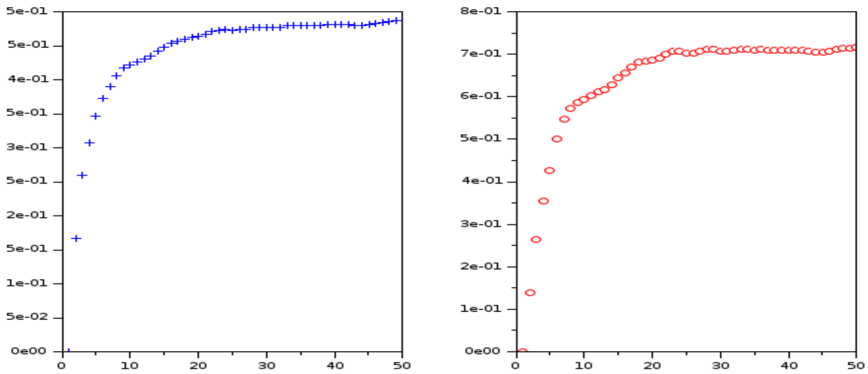
□

c) Le programme précédent nous permet d'obtenir les graphiques suivants pour différentes valeurs de `n` :

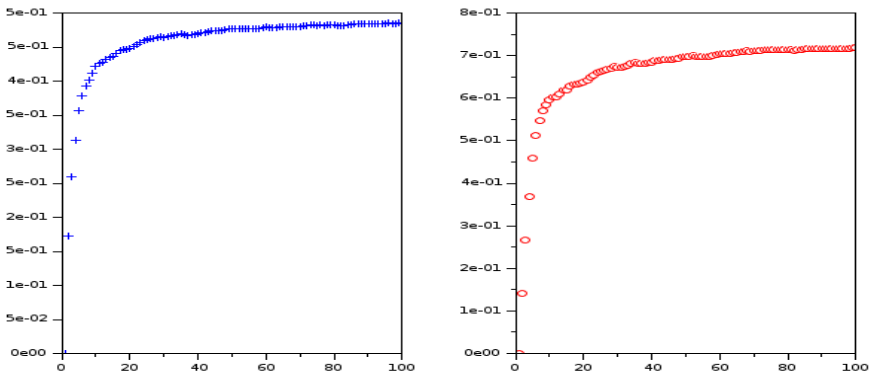
`n`= 10



`n`= 50



`n`= 100



Expliquer ces graphiques à l'aide des questions ***5.*** et ***6.***.

Démonstration.

- D'après la loi faible des grands nombres, `E` est une approximation de $\mathbb{E}(X_n)$, donc les graphiques bleus ci-dessus montrent l'évolution de $\mathbb{E}(X_n)$ quand n croît.
  Donc, on peut deviner sur ces graphiques $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.
- Comme $p = \dfrac{1}{3}$, d'après la question ***5.***, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p(1-p^n)}{1-p} = \dfrac{p}{1-p} = \dfrac{1}{2}$

$$\boxed{\text{Les graphiques de gauche illustrent le résultat } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{2}.}$$

- D'après la loi faible des grands nombres, `V` est une approximation de $\mathbb{V}(X_n)$, donc les graphiques rouges ci-dessus montrent l'évolution de $\mathbb{V}(X_n)$ quand n croît.
  Donc, on peut deviner sur ces graphiques $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(X_n)$.
- Comme $p = \dfrac{1}{3}$, d'après la question ***6.*** :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(X_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{p}{(1-p)^2}\left(1-(2n+1)p^n(1-p)-p^{2n+1}\right) = \frac{p}{(1-p)^2} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{\text{Les graphiques de droite illustrent le résultat } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(X_n) = \frac{3}{4}.}$$

□