

---

## DS3 (version A) /140

---

### I. Exercice 1 /46 (EML 1998)

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est  $p$ ,  $0 < p < 1$  ; la proportion de boules blanches est  $1 - p$ .

On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise (toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant).

1. On note  $N_V$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et  $N_B$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

a) Quelles sont les lois des variables aléatoires  $N_V$  et  $N_B$  ?

- 1 pt : loi de  $N_V$
- 1 pt : loi de  $N_B$
- 1 pt : justification

b) Les variables aléatoires  $N_V$  et  $N_B$  sont-elles indépendantes ?

- 2 pts : 1 pt pour penser à introduire un couple particulier, 1 pt pour le reste

On définit le couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  à valeurs dans  $(\mathbb{N}^*)^2$  de la façon suivante.

Pour tout  $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $[X = i] \cap [Y = j]$  est l'événement :

« les  $i$  premières boules tirées sont blanches, les  $j$  suivantes sont vertes et la  $(i + j + 1)$ <sup>ème</sup> est blanche

ou

les  $i$  premières boules tirées sont vertes, les  $j$  suivantes sont blanches et la  $(i + j + 1)$ <sup>ème</sup> est verte. »

Par exemple, pour la suite de tirages  $BBBVVBVBB \dots$  (où  $V$  est mis pour vert et  $B$  pour blanc), on a  $X = 3$  et  $Y = 2$ .

2. a) Déterminer la loi de la variable aléatoire  $X$ .

- 1 pt : introduction des événements  $V_k$  et  $B_k$
- 1 pt : décomposition de  $[X = i] \cap [Y = j]$
- 3 pts :  $[X = i] = [N_V = i + 1] \cup [N_B = i + 1]$  (en fonction des explications)
- 2 pts : passage aux probabilités (1 pt : incompatibilité, 1 pt : loi de  $N_V$ )

b) Montrer que la variable aléatoire  $X$  admet une espérance et que  $\mathbb{E}(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}$ .

- 1 pt : citer l'absolue convergence
- 1 pt : séries géométriques dérivées convergentes
- 1 pt :  $X$  admet une espérance
- 2 pts : 1 pour la formule des sommes géométriques, 1 pour le reste

c) Montrer que  $\mathbb{E}(X)$  est minimale lorsque  $p = \frac{1}{2}$ , et calculer cette valeur minimale.

- 1 pt :  $f$  dérivable comme somme (même pour une explication sommaire)
- 1 pt : calcul de  $f'$
- 1 pt : signe de  $f'(x)$
- 1 pt : calcul de  $f(\frac{1}{2})$
- 1 pt : conclusion

3. Montrer, pour tout  $(i, j)$  de  $(\mathbb{N}^*)^2$  :

$$\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

- (1 pt : introduction des  $V_k$  et  $B_k$  si non fait précédemment)
- 2 pts : expression  $[X = i] \cap [Y = j]$
- 1 pt : incompatibilité (citée)
- 1 pt : indépendance des lancers
- 2 pts : calcul

4. a) En déduire la loi de la variable aléatoire  $Y$ .

- 1 pt : donnée du SCE
- 1 pt : écriture de la FPT
- 1 pt : séries géométriques convergentes
- 2 pts : 1 pt pour décalage d'indice, 1 pt pour somme des séries géométriques

b) Montrer que la variable aléatoire  $Y$  admet une espérance que l'on calculera.

- 1 pt : citer l'absolue convergence
- 1 pt : séries géométriques dérivées premières convergentes
- 1 pt :  $Y$  admet une espérance
- 1 pt : reste du calcul

5. a) Établir que, si  $p \neq \frac{1}{2}$ , les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

(On pourra envisager  $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1])$ )

- 1 pt : calcul de  $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1])$
- 1 pt : calcul de  $\mathbb{P}([X = 1])\mathbb{P}([Y = 1])$
- 3 pts : 1 pt pour raisonner sur des égalités, 1pt pour simplifier, 1 pt conclure

b) Démontrer que, si  $p = \frac{1}{2}$ , les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

- 1 pt : calcul de  $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$
- 1 pt : calcul de  $\mathbb{P}([X = i])$
- 1 pt : calcul de  $\mathbb{P}([Y = j])$
- 1 pt : conclusion

## II. Exercice 2 /33 (/41 pour les cubes)

On note  $I$  la matrice  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et on considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

1. a) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Montrer que la matrice  $A - \lambda I$  n'est pas inversible si et seulement si  $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0$ .

• 1 pt : cas  $\lambda = 2$

• 3 pts : reste

b) Étudier la fonction  $f$  qui, à tout réel  $x$ , associe  $f(x) = x^3 - 9x^2 - 27x + 53$ , puis dresser son tableau de variations.

(on précisera les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ , on notera  $m$  le minimum local de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $M$  le maximum local de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et on ne cherchera ni à calculer  $m$ , ni à calculer  $M$ )

• 1 pt : dérivabilité + dérivée de  $f$

• 1 pt : racines

• 1 pt : variations de  $f$

• 1 pt :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

c) Calculer  $f(0)$  et  $f(3)$  puis déterminer les signes de  $m$  et  $M$ .

• 1 pt :  $f(0)$

• 1 pt :  $f(3)$

• 1 pt : stricte décroissance de  $f$

• 1 pt : conclusion

d) Montrer que  $A - \lambda I$  n'est pas inversible pour exactement trois valeurs de  $\lambda$ , que l'on ne cherchera pas à calculer et que l'on notera  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ , avec  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ .

• 3 pts : 1er théorème de la bijection (1 pt : hypothèse, 1 pt : intervalle image, 1 pt :  $0 \in ]-\infty, M]$ )

• 2 pts : de même sur les 2 autres intervalles

• 1 pt : rappeler la question 1.a)

e) Seulement pour les cubes (les autres pourront se servir de ce résultat sans démonstration) : En déduire qu'il existe une matrice  $P$  inversible telle que

$$A = PDP^{-1}, \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

• 1 pt :  $A$  est diagonalisable

• 1 pt : relation de similitude

2. L'objectif de cette question est de déterminer l'ensemble  $E$  des matrices  $M$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $A$  c'est-à-dire qui vérifient  $AM = MA$ .

a) Montrer que les matrices qui commutent avec  $D$  sont les matrices diagonales.

• 1 pt : calcul de  $DM$

• 1 pt : calcul de  $MD$

• 1 pt : résolution du système

• 1 pt :  $\lambda_1 \neq \lambda_2$

b) Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

- (i)  $M$  est une matrice de  $E$ .
- (ii)  $P^{-1}MP$  commute avec  $D$ .

- 1 pt : raisonnement par équivalence (ou double implication)
- 1 pt : calcul

c) Établir que toute matrice  $M$  de  $E$  est combinaison linéaire des trois matrices suivantes :

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

- 1 pt : pour lien avec  $P^{-1}MP$  (2.b)
- 1 pt : pour lien avec diagonale (2.a)
- 1 pt : expression de  $M$
- 1 pt : pour la combinaison linéaire

d) En déduire que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et donner sa dimension.

- 1 pt : écriture sous forme de sev engendré
- 2 pts : liberté de la famille (1 pt pour la déf, 1 pt pour multiplier à gauche /droite par  $P^{-1}$  et  $P$ )
- 1 pt : conclure que c'est une base (génératrice + libre)
- 1 pt : dimension de  $E$

e) Seulement pour les cubes : Montrer, en raisonnant sur les valeurs propres de  $A$ , qu'il n'existe aucun polynôme annulateur non nul de  $A$  de degré inférieur ou égal à 2. En déduire que  $(I, A, A^2)$  est une base de  $E$ .

- 1 pt : relation  $\text{Sp}(A) \subset \{\text{racines d'un polynôme annulateur}\}$  (pas égalité !)
- 1 pt :  $R$  multiple de  $(X - \lambda_1)$ ,  $(X - \lambda_2)$  et  $(X - \lambda_3)$
- 1 pt : les éléments de  $\mathcal{F}$  appartiennent à  $E$
- 2 pts : liberté de  $\mathcal{F}$
- 1 pt : la famille  $\mathcal{F}$  est libre et de bon cardinal, donc c'est une base de  $E$

### III. Exercice 3 /28

Dans cet exercice,  $p$  désigne un réel de  $]0, 1[$  et on note  $q = 1 - p$ .

On considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , indépendantes et suivant toutes deux la même loi géométrique de paramètre  $p$ .

1. On pose  $Z = \inf(X, Y)$  et on admet que  $Z$  est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

On rappelle que, pour tout entier naturel  $k$ , on a l'égalité :  $[Z > k] = [X > k] \cap [Y > k]$ .

a) Pour tout entier naturel  $k$ , calculer  $\mathbb{P}([Z > k])$ .

- **2 pts : survie de  $Z$  (1 pt : indépendance, 1 pt : même loi)**
- **1 pt : décomposition  $[X \leq k]$**
- **3 pts : calcul de  $\mathbb{P}([X \leq k])$  (1 pt : incompatibilité, 1 pt : loi géométrique, 1 pt : reste)**
- **1 pt : calcul de  $\mathbb{P}([Z > k])$**

b) Établir que, pour tout entier naturel  $k$  supérieur ou égal à 1, on a :

$$\mathbb{P}([Z = k]) = \mathbb{P}([Z > k - 1]) - \mathbb{P}([Z > k])$$

- **1 pt : égalité classique  $[Z \geq k] = [Z > k] \cup [Z = k]$**
- **1 pt : lien avec  $[Z > k - 1]$**
- **1 pt : incompatibilité**

c) En déduire que  $Z$  suit la loi géométrique de paramètre  $(1 - q^2)$ .

- **1 pt : support de  $Z$**
- **2 pts : calcul de  $\mathbb{P}([Z = k])$**

2. On définit la variable aléatoire  $T$  de la façon suivante :

Pour tout  $\omega$  de  $\Omega$  tel que  $X(\omega)$  est un entier naturel pair, on pose  $T(\omega) = \frac{X(\omega)}{2}$ ,

et, pour tout  $\omega$  de  $\Omega$  tel que  $X(\omega)$  est un entier naturel impair, on pose  $T(\omega) = \frac{1 + X(\omega)}{2}$ .

On admet que  $T$  est une variable aléatoire, elle aussi définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

a) Montrer que  $T$  prend des valeurs entières non nulles.

- **1 pt : cas  $X(\omega)$  pair**
- **1 pt : cas  $X(\omega)$  impair**
- **1 pt :  $0 \notin T(\Omega)$**

b) Réciproquement, justifier que tout entier naturel  $k$  non nul est élément de  $T(\Omega)$  et en déduire que  $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ .

- **2 pts**

c) Exprimer l'événement  $[T = k]$  en fonction de certains événements  $[X = i]$  puis montrer que  $T$  suit la même loi que  $Z$ .

- **2 pts : explications  $[T = k]$**
- **1 pt : décomposition  $[T = k]$**
- **1 pt : même support**
- **2 pts :  $\mathbb{P}([T = k]) = \mathbb{P}([Z = k])$**

3. On rappelle que la fonction `rand` renvoie de façon uniforme un réel aléatoire élément de  $[0, 1[$ .

Par ailleurs, la commande `modulo(x,2)` permet de tester si  $x$  est pair. Plus précisément :

×  $x$  est pair si et seulement si `modulo(x,2)` vaut 0,

×  $x$  est impair si et seulement si `modulo(x,2)` vaut 1.

Compléter le programme suivant pour que, d'une part, il simule les lancers d'une pièce donnant « pile » avec la probabilité  $p$  et calculer la valeur prise par la variable aléatoire  $X$  égale au rang du premier « pile » obtenu lors de ces lancers ( $X$  suit bien la loi géométrique de paramètre  $p$ ) et pour que, d'autre part, il calcule et affiche la valeur prise par  $T$ , la variable aléatoire  $T$  ayant été définie dans la deuxième question.

```
1  x = 1
2  t = 0
3  lancer = rand()
4  while lancer <= p
5      x = .....
6      lancer = rand()
7  end
8  if modulo(x,2) == 0 then
9      .....
10 else
11     .....
12 end
13 disp(t)
```

- 3 pts : 1 pt par ligne
- 1 pt : si explication pertinente

## IV. Exercice 4 /33

On désigne par  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de  $n$  urnes, numérotées de 1 à  $n$ , contenant chacune  $n$  boules. On répète  $n$  épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.

Pour tout  $i$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , on note  $X_i$  la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée  $i$  contient toujours  $n$  boules au bout de ces  $n$  épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. a) Pour tout  $i$  et tout  $k$ , éléments de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , on note  $U_{i,k}$  l'évènement « l'urne numéro  $i$  est choisie à la  $k^{\text{ème}}$  épreuve ».

Écrire l'évènement  $[X_i = 1]$  à l'aide de certains des évènements  $U_{i,k}$ , puis montrer que :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \mathbb{P}([X_i = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

- 1 pt : décomposition de  $[X_i = 1]$
- 2 pts : calcul de  $\mathbb{P}(U_{i,k})$  (1 pt pour équiprobable, 1 pt pour évènement contraire)
- 2 pts : calcul de  $\mathbb{P}([X_i = 1])$  (1 pt pour indépendance, 1 pt pour le reste)

b) Justifier également que, si  $i$  et  $j$  sont deux entiers distincts, éléments de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , on a :

$$\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

- 1 pt : décomposition de  $[X_i = 1] \cap [X_j = 1]$
- 1 pt : calcul de  $\mathbb{P}(\overline{U_{i,k} \cup U_{j,k}})$  (même argument que précédent)
- 1 pt : calcul de  $\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1])$  (même argument que précédent)

c) Comparer  $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$  et  $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$  et en déduire que, si  $i$  et  $j$  sont deux entiers distincts, éléments de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , alors les variables  $X_i$  et  $X_j$  ne sont pas indépendantes.

- 1 pt : comparaison de  $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$  et  $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ .
- 1 pt : calcul de  $\mathbb{P}([X_i = 1])\mathbb{P}([X_j = 1])$
- 1 pt :  $\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) \neq \mathbb{P}([X_i = 1])\mathbb{P}([X_j = 1])$

2. On pose  $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .

a) Déterminer l'espérance de  $Y_n$ , notée  $\mathbb{E}(Y_n)$ .

- 1 pt :  $Y_n$  admet une espérance
- 1 pt : calcul  $\mathbb{E}(X_i)$
- 1 pt : calcul  $\mathbb{E}(Y_n)$  (linéarité de l'espérance)

b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{n}$  et donner un équivalent de  $\mathbb{E}(Y_n)$  lorsque  $n$  est au voisinage de  $+\infty$ .

- 1 pt : forme  $\exp(\ln(\dots))$
- 1 pt :  $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
- 1 pt :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0$
- 1 pt : composition de limites car  $\exp$  continue en  $-1$
- 1 pt : équivalent de  $\frac{\mathbb{E}(Y_n)}{n}$
- 1 pt : équivalent de  $\mathbb{E}(Y_n)$

3. Pour tout  $i$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , on note  $N_i$  la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée  $i$  à la fin de ces  $n$  épreuves.

a) Donner sans calcul la loi de  $N_i$  ainsi que la valeur de  $\mathbb{E}(N_i)$ .

- 1 pt : description de l'expérience
- 1 pt : description de la v.a.r.  $N_i$
- 1 pt : conclusion sur la loi de  $N_i$  (bons paramètres)
- 1 pt :  $\mathbb{E}(N_i)$

b) Que vaut le produit  $N_i X_i$  ?

- 2 pts (1 pt par cas)

c) Les variables  $N_i$  et  $X_i$  sont-elles indépendantes ?

- 1 pt : calcul  $\mathbb{E}(N_i X_i)$
- 1 pt : conclusion
- 1 pt : bonus si fait avec  $\mathbb{E}$  et pas fait avec la définition

4. On rappelle que `grand(1,1,'uin',1,n)` renvoie au hasard un entier de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

Compléter le programme informatique suivant pour qu'il simule l'expérience décrite au début de cet exercice et affiche les valeurs prises par  $X_1$  et  $N_1$  pour une valeur de  $n$  entrée par l'utilisateur.

```
1  n = input('Donnez un entier naturel n supérieur ou égal à 2')
2  n1 = 0
3  x1 = 1
4  for k = 1:n
5      hasard = grand(1,1,'uin',1,n)
6      if hasard == 1 then
7          x1 = .....
8          n1 = .....
9      end
10 end
11 disp(x1)
12 disp(n1)
```

- 2 pts : 1 pt pour la ligne 7, 1 pt pour l'explication
- 2 pts : 1 pt pour la ligne 8, 1 pt pour l'explication