DS3 (version A)

I. Exercice 1 (EML 1998)

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher.
La proportion de boules vertes est p, $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$.
On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise (toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant).

1. On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

a) Quelles sont les lois des variables aléatoires N_V et N_B ?

Démonstration.

- L'expérience aléatoire consiste en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli (dont le succès est d'obtenir une boule verte) indépendantes et de même paramètre p.
- La v.a.r. N_V est le rang d'apparition du premier succès de l'expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi, } N_V \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$$

- Dans le cas de la v.a.r. N_B, le succès de chaque épreuve de Bernoulli est l'obtention d'une boule blanche. Il se produit avec probabilité $1 - p$.
- La v.a.r. N_B est le rang d'apparition du premier succès de l'expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi, } N_B \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p)}$$

□

b) Les variables aléatoires N_V et N_B sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

- La première boule verte ne peut apparaître au même rang que la première boule verte puisqu'on ne tire qu'une boule lors de chaque tirage. Ainsi :

$$[N_V = 1] \cap [N_B = 1] = \varnothing$$

On en déduit que : $\mathbb{P}([N_V = 1] \cap [N_B = 1]) = 0$.

- Or : $\mathbb{P}([N_V = 1]) = p(1-p)^0 = p \neq 0$ et $\mathbb{P}([N_B = 1]) = (1-p)(1-(1-p))^0 = 1 - p \neq 0$.

On en déduit que :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}([N_V = 1] \cap [N_B = 1]) & \neq & \mathbb{P}([N_V = 1]) \times \mathbb{P}([N_B = 1]) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & \neq & p(1-p) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } N_V \text{ et } N_B \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

□

On définit le couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ de la façon suivante.
Pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $[X = i] \cap [Y = j]$ est l'événement :

« les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i+j+1)^{\text{ème}}$ est blanche

ou

les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i+j+1)^{\text{ème}}$ est verte. »

Par exemple, pour la suite de tirages $BBBVVBVBB\cdots$ (où V est mis pour vert et B pour blanc), on a $X = 3$ et $Y = 2$.

2. a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

Démonstration.
Dans la suite du problème, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements :
× V_k : « on a obtenu une boule verte lors du $k^{\text{ème}}$ tirage »,
× B_k : « on a obtenu une boule blanche lors du $k^{\text{ème}}$ tirage ».

- Soit $i \in \mathbb{N}^*$.
  Notons Z (resp. T) la v.a.r. donnant le rang d'apparition de la première boule blanche (resp. verte) à l'issue des $i+1$ premiers tirages.
  Ainsi, $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :
$$\left\{ \begin{array}{l} [Z = 1] = B_{i+2} \\ \forall j \geqslant 2,\ [Z = j] = V_{i+2} \cap \ldots \cap V_{i+j} \cap B_{i+j+1} \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} [T = 1] = V_{i+2} \\ \forall j \geqslant 2,\ [T = j] = B_{i+2} \cap \ldots \cap B_{i+j} \cap V_{i+j+1} \end{array} \right.$$
- On remarque alors que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{array}{rcl} [X = i] \cap [Y = j] & = & (B_1 \cap \ldots \cap B_i \cap V_{i+1} \cap V_{i+2} \cap \ldots \cap V_{i+j} \cap B_{i+j+1}) \\ & \cup & (V_1 \cap \ldots \cap V_i \cap B_{i+1} \cap B_{i+2} \cap \ldots \cap B_{i+j} \cap V_{i+j+1}) \\ & = & ([N_V = i+1] \cap [Z = j]) \ \cup \ ([N_B = i+1] \cap [T = j]) \end{array}$$
- On en déduit que :
$$\begin{array}{rll} & [X = i] & \\ = & [X = i] \ \cap \ \Omega \ = \ [X = i] \ \cap \ \Big(\bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^*} [Y = j] \Big) & \textit{(car } ([Y = j])_{j \in \mathbb{N}^*} \textit{ est un sce)} \\ = & \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^*} \Big([X = i] \ \cap \ [Y = j] \Big) & \textit{(par distributivité de } \cap \textit{ sur } \cup \textit{)} \\ = & \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^*} \Big(([N_V = i+1] \cap [Z = j]) \ \cup \ ([N_B = i+1] \cap [T = j]) \Big) & \textit{(d'après le point précédent)} \\ = & \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^*} ([N_V = i+1] \cap [Z = j]) \ \cup \ \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^*} ([N_B = i+1] \cap [T = j]) & \\ = & \Big([N_V = i+1] \cap \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^*} [Z = j] \Big) \ \cup \ \Big([N_B = i+1] \cap \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^*} [T = j] \Big) & \textit{(par distributivité de } \cap \textit{ sur } \cup \textit{)} \\ = & \Big([N_V = i+1] \cap \Omega \Big) \ \cup \ \Big([N_B = i+1] \cap \Omega \Big) & \textit{(car } ([Z = j])_{j \in \mathbb{N}^*} \textit{ et } ([T = j])_{j \in \mathbb{N}^*} \textit{ sont des sce)} \\ = & [N_V = i+1] \ \cup \ [N_B = i+1] & \end{array}$$

- Finalement :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X=i]) & = & \mathbb{P}([N_V = i+1] \ \cup \ [N_B = i+1]) & \\ & = & \mathbb{P}([N_V = i+1]) \ + \ \mathbb{P}([N_B = i+1]) & \textit{(car } [N_V = i+1] \textit{ et } [N_B = i+1] \textit{ sont incompatibles)} \\ & = & p \ (1-p)^i \ + \ (1-p) \ p^i & \textit{(car } N_V \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \textit{ et } N_B \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p)\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } i \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([X=i]) = p \ (1-p)^i \ + \ (1-p) \ p^i.}$$

Remarque

- Nous avons mis en place une démonstration longue pour démontrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$:

$$[X = i] \ = \ [N_V = i+1] \ \cup \ [N_B = i+1]$$

A priori, l'esprit de l'énoncé était plutôt d'affirmer cette égalité d'événements. Pour avoir l'intuition de cette égalité, il suffit d'analyser que lorsque i est fixé et j varie de 1 à $+\infty$, les parties $B_1 \cap \ldots \cap B_i \cap V_{i+1}$ et $V_1 \cap \ldots \cap V_i \cap B_{i+1}$ sont fixes.

- Les v.a.r. Z et T ont été définies après avoir fixé l'entier $i \in \mathbb{N}^*$. En toute rigueur, on aurait dû noter $Z^{(i)}$ et $T^{(i)}$ ces variables aléatoire. On a fait ici le choix de ne pas alourdir les notations pour que la démonstration reste lisible. □

b) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{p}{1-p} + \dfrac{1-p}{p}$.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance ssi la série $\sum\limits_{i \geqslant 1} i \ \mathbb{P}([X=i])$ est absolument convergente.

  Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- Notons $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{i=1}^{N} i \ \mathbb{P}([X=i]) & = & \sum\limits_{i=1}^{N} i \ (p \ (1-p)^i \ + \ (1-p) \ p^i) \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{N} i \ p \ (1-p)^i \ + \ \sum\limits_{i=1}^{N} i \ (1-p) \ p^i \\ & = & p \sum\limits_{i=1}^{N} i \ (1-p)^i \ + \ (1-p) \ \sum\limits_{i=1}^{N} i \ p^i \\ & = & p \ (1-p) \ \sum\limits_{i=1}^{N} i \ (1-p)^{i-1} \ + \ p \ (1-p) \ \sum\limits_{i=1}^{N} i \ p^{i-1} \end{array}$$

On reconnaît les sommes partielles de séries géométriques dérivées premières convergentes car de raison respective $(1-p) \in \,]-1,1[$ et $p \in \,]-1,1[$.

- Ainsi, la série $\sum\limits_{i \geqslant 1} i \ \mathbb{P}([X = i])$ est convergente.
  La v.a.r. X admet donc une espérance donnée par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X) & = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} i \ \mathbb{P}([X=i]) \\ & = & p\ (1-p) \sum\limits_{i=1}^{+\infty} i\ (1-p)^{i-1} \ + \ p\ (1-p) \sum\limits_{i=1}^{+\infty} i\ p^{i-1} \\ & = & p\ (1-p)\ \dfrac{1}{(1-(1-p))^2} \ + \ p\ (1-p)\ \dfrac{1}{(1-p)^2} \\ & = & \cancel{p}\ (1-p)\ \dfrac{1}{p^{\cancel{2}}} \ + \ p\ \cancel{(1-p)}\ \dfrac{1}{(1-p)^{\cancel{2}}} \\ & = & \dfrac{1-p}{p} + \dfrac{p}{1-p} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{1-p}{p} + \dfrac{p}{1-p}}$$

□

c) Montrer que $\mathbb{E}(X)$ est minimale lorsque $p = \dfrac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.

Démonstration.

- Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1-x}{x} + \dfrac{x}{1-x}$ sur $]0,1[$.
  La fonction f est dérivable sur $]0,1[$ comme somme des fonctions :
  × $x \mapsto \dfrac{1-x}{x}$ dérivable sur $]0,1[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $]0,1[$ (car polynomiales) et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,1[$.
  × $x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$ dérivable sur $]0,1[$ pour les mêmes raisons.
- Soit $x \in\ ]0,1[$.

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \dfrac{-x-(1-x)}{x^2} + \dfrac{(1-x) - x\ (-1)}{(1-x)^2} \\[2ex] & = & \dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{-(1-x)^2 + x^2}{x^2\ (1-x)^2} \\[2ex] & = & \dfrac{-(1-2x+\cancel{x^2}) - \cancel{x^2}}{x^2\ (1-x)^2} \\[2ex] & = & \dfrac{2x-1}{x^2\ (1-x)^2} \end{array}$$

  Comme $x^2\ (1-x)^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $2x-1$. Enfin :

$$\begin{array}{rcl} 2x - 1 \leqslant 0 & \Leftrightarrow & 2x \leqslant 1 \\ & \Leftrightarrow & x \leqslant \dfrac{1}{2} \end{array}$$

- On en déduit le tableau de variation de f :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
Variations de f	‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

Détaillons les différents éléments de ce tableau :

× $\dfrac{1-x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ et $\dfrac{x}{1-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

D'où : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

× $f(\frac{1}{2}) = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\ 2 = 2$.

× $\dfrac{1-x}{x} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{x}{1-x} \underset{x\to 1^-}{\sim} \dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$.

D'où : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

- La fonction f est décroissante sur $]0, \frac{1}{2}[$ puis croissante sur $[\frac{1}{2}, 1[$.
Elle admet donc un minimum en $x = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathbb{E}(X) = f(p) \text{ est minimale lorsque } p = \tfrac{1}{2}, \text{ de minimum } f(\tfrac{1}{2}) = 2.}$$

□

3. Montrer, pour tout (i,j) de $(\mathbb{N}^*)^2$:

$$\mathbb{P}\left([X=i]\cap[Y=j]\right) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

Démonstration.

- Soit $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$\begin{array}{rcl} [X=i]\cap[Y=j] & = & (B_1\cap\ldots\cap B_i\cap V_{i+1}\cap\ldots\cap V_{i+j}\cap B_{i+j+1}) \\ & \cup & (V_1\cap\ldots\cap V_i\cap B_{i+1}\cap\ldots\cap B_{i+j}\cap V_{i+j+1}) \\ & = & \left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} B_k\right)\cap\left(\bigcap\limits_{k=1}^{j} V_{i+k}\right)\cap B_{i+j+1} \\ & \cup & \left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} V_k\right)\cap\left(\bigcap\limits_{k=1}^{j} B_{i+k}\right)\cap V_{i+j+1} \end{array}$$

Ainsi, $[X=i]\cap[Y=j]$ est la réunion de deux événements incompatibles. En effet :

$$\begin{array}{rl} & \left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} B_k\right)\cap\left(\bigcap\limits_{k=1}^{j} V_{i+k}\right)\cap B_{i+j+1}\ \cap\ \left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} V_k\right)\cap\left(\bigcap\limits_{k=1}^{j} B_{i+k}\right)\cap V_{i+j+1} \\ = & \left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} B_k\right)\cap\left(\bigcap\limits_{k=1}^{j} V_{i+k}\right)\cap\left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} V_k\right)\cap\left(\bigcap\limits_{k=1}^{j} B_{i+k}\right)\cap\underbrace{\left(B_{i+j+1}\cap V_{i+j+1}\right)}_{\varnothing} = \varnothing \end{array}$$

- On en déduit que :

$$\begin{array}{rl}
& \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \\
= & \mathbb{P}\left(\left(\left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} B_k\right) \cap \left(\bigcap\limits_{k=1}^{j} V_{i+k}\right) \cap B_{i+j+1} \right) \ \cup \ \left(\left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} V_k\right) \cap \left(\bigcap\limits_{k=1}^{j} B_{i+k}\right) \cap V_{i+j+1} \right) \right) \\
= & \mathbb{P}\Big(\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{i} B_k\Big) \cap \Big(\bigcap\limits_{k=1}^{j} V_{i+k}\Big) \cap B_{i+j+1} \Big) \ + \ \mathbb{P}\Big(\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{i} V_k\Big) \cap \Big(\bigcap\limits_{k=1}^{j} B_{i+k}\Big) \cap V_{i+j+1} \Big) \qquad \textit{(par additivité)} \\
= & \prod\limits_{k=1}^{i} \mathbb{P}(B_k) \times \Big(\prod\limits_{k=1}^{i} \mathbb{P}(V_{i+k})\Big) \times \mathbb{P}(B_{i+j+1}) + \prod\limits_{k=1}^{i} \mathbb{P}(V_k) \times \Big(\prod\limits_{k=1}^{i} \mathbb{P}(B_{i+k})\Big) \times \mathbb{P}(V_{i+j+1}) \qquad \textit{(par indépendance des lancers)} \\
= & \prod\limits_{k=1}^{i} (1-p) \times \Big(\prod\limits_{k=1}^{i} p\Big) \times (1-p) \ + \ \prod\limits_{k=1}^{i} p \times \Big(\prod\limits_{k=1}^{i} (1-p)\Big) \times p \\
= & (1-p)^i \times p^j \times (1-p) \ + \ p^i \times (1-p)^j \times p \\
= & (1-p)^{i+1} \times p^j \ + \ p^{i+1} \times (1-p)^j
\end{array}$$

$$\boxed{\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \mathbb{P}\left([X=i]\cap[Y=j]\right) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j}$$

□

4. a) En déduire la loi de la variable aléatoire Y.

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}^*$.
La famille $([X=i])_{i\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Y=j]) & = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X=i]\cap[Y=j]\right) & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \left(p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j\right) & \\
& = & (1-p)^j \sum\limits_{i=1}^{+\infty} p^{i+1} + p^j \sum\limits_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{i+1} & (*) \\
& = & p^2\ (1-p)^j \sum\limits_{i=1}^{+\infty} p^{i-1} + (1-p)^2\ p^j \sum\limits_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} & \\
& = & p^2\ (1-p)^j \sum\limits_{i=0}^{+\infty} p^{i} + (1-p)^2\ p^j \sum\limits_{i=0}^{+\infty} (1-p)^{i} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & p^2\ (1-p)^j \ \dfrac{1}{1-p} + (1-p)^2\ p^j \ \dfrac{1}{1-(1-p)} & \\
& = & p^2\ (1-p)^{j-1} + (1-p)^2\ p^{j-1} &
\end{array}$$

(∗) ce passage est justifié par le fait que les séries $\sum\ p^i$ et $\sum\ (1-p)^i$ sont convergentes en tant que séries géométriques de raison respective $p \in\,]0,1[$ et $1-p \in\,]0,1[$.

$$\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Y=j]) = p^2\ (1-p)^{j-1} + (1-p)^2\ p^{j-1}}$$

□

b) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance que l'on calculera.

Démonstration.

- La v.a.r. Y admet une espérance ssi la série $\sum\limits_{j \geqslant 1} j\ \mathbb{P}([Y=j])$ est absolument convergente.
  Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Notons $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{j=1}^{N} j\ \mathbb{P}([Y=j]) & = & \sum\limits_{j=1}^{N} (j\ p^2\ (1-p)^{j-1} + j\ (1-p)^2\ p^{j-1}) \\ & = & p^2 \sum\limits_{j=1}^{N} j\ (1-p)^{j-1} + (1-p)^2 \sum\limits_{j=1}^{N} j\ p^{j-1} \end{array}$$

  On reconnaît les sommes partielles de séries géométriques dérivées premières convergentes car de raison respective $(1-p) \in]-1,1[$ et $p \in]-1,1[$.
- Ainsi, la série $\sum\limits_{j \geqslant 1} j\ \mathbb{P}([Y=j])$ est convergente.
  La v.a.r. Y admet donc une espérance donnée par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(Y) & = & \sum\limits_{j=1}^{+\infty} j\ \mathbb{P}([Y=j]) \\ & = & p^2 \sum\limits_{j=1}^{+\infty} j\ (1-p)^{j-1} + (1-p)^2 \sum\limits_{j=1}^{+\infty} j\ p^{j-1} \\ & = & p^2 \dfrac{1}{(1-(1-p))^2} + (1-p)^2 \dfrac{1}{(1-p)^2} \\ & = & 1+1 = 2 \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = 2}$$

□

5. a) Établir que, si $p \neq \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
(On pourra envisager $\mathbb{P}\left([X=1] \cap [Y=1]\right)$)

Démonstration.
Supposons que $p \neq \frac{1}{2}$.

- D'après la question ***3.*** :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=1]) & = & p^2\ (1-p) + p\ (1-p)^2 \\ & = & p\ (1-p)\ (\cancel{p} + (1-\cancel{p})) \\ & = & p\ (1-p) \end{array}$$

- Par ailleurs d'après la question ***2.a)*** :

$$\mathbb{P}([X=1]) = p\ (1-p) + p\ (1-p) = 2\ p\ (1-p)$$

  et d'après la question ***4.a)*** :

$$\mathbb{P}([Y=1]) = p^2 + (1-p)^2$$

- Raisonnons par équivalence.

$$\begin{array}{rl} & \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) \ = \ \mathbb{P}([X=1])\times\mathbb{P}([Y=1]) \\ \Leftrightarrow & p\ (1-p) \ = \ 2\ p\ (1-p)\times(p^2+(1-p)^2) \\ \Leftrightarrow & 1 \ = \ 2\ \dfrac{p\ (1-p)}{p\ (1-p)}\ (p^2+(1-p)^2) \qquad \textit{(car } p(1-p)\neq 0\textit{)} \\ \Leftrightarrow & 2\ (p^2+(1-p)^2)-1=0 \\ \Leftrightarrow & 2\ (2p^2-2p+1)-1=0 \\ \Leftrightarrow & 4p^2-4p+1=0 \\ \Leftrightarrow & (2p-1)^2=0 \\ \Leftrightarrow & p=\dfrac{1}{2} \end{array}$$

Or comme $p\neq\dfrac{1}{2}$, la dernière égalité n'est pas vérifiée. Il en est de même de la première :

$$\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) \ \neq \ \mathbb{P}([X=1])\times\mathbb{P}([Y=1])$$

$$\boxed{\text{Si } p\neq\dfrac{1}{2},\ X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

□

b) Démontrer que, si $p=\dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Démonstration.
On suppose que $p=\dfrac{1}{2}$. Ainsi, $1-p=\dfrac{1}{2}$.
Soit $(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2$.

- D'après la question ***3.*** :

$$\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}+\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j} \ = \ 2\ \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j+1} \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j}$$

- Par ailleurs d'après la question ***2.a)*** :

$$\mathbb{P}([X=i]) \ = \ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{i} \ = \ 2\ \frac{1}{2}\ \left(\frac{1}{2}\right)^{i} \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^{i}$$

et d'après la question ***4.a)*** :

$$\mathbb{P}([Y=j]) \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \ = \ 2\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^{j}$$

- Finalement :

$$\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{j} \ = \ \mathbb{P}([X=i])\times\mathbb{P}([Y=j])$$

$$\boxed{\text{Si } p=\dfrac{1}{2},\ X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$$

□

Remarque
L'énoncé rate l'occasion de poser une question intéressante : « déterminer $\mathbb{E}(XY)$ dans ce cas ».
On sait que X et Y sont indépendantes, et que ces deux v.a.r. admettent une espérance. On en déduit que XY admet une espérance donnée par :

$$\mathbb{E}(XY) \;=\; \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) \;=\; 2 \times 2 \;=\; 4$$

(d'après les questions ***2.c)*** et ***4.b)***)

II. Exercice 2 (EDHEC 2014)

On note I la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer que la matrice $A - \lambda\, I$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0$.

Démonstration.

- Déterminons le rang de la matrice $A - \lambda I$.

$$\begin{aligned}
& \mathrm{rg}(A - \lambda I) \\
= \;& \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 7-\lambda & 5 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 6 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} \;& \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 7-\lambda & 5 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 6\, L_3 - (7-\lambda)\, L_1}}{=} \;& \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 30-(7-\lambda) & 6-(7-\lambda)(3-\lambda) \end{pmatrix}\right) \\
= \;& \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 23+\lambda & -15+10\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\
\overset{L_3 \leftarrow (2+\lambda)\, L_3 + (23+\lambda)\, L_2}{=} \;& \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 0 & (2+\lambda)\,(-15+10\lambda-\lambda^2) + (23+\lambda)\,(-1+\lambda) \end{pmatrix}\right) \quad \textit{(dans le cas où } 2+\lambda \neq 0\textit{)} \\
= \;& \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 0 & -53+27\lambda+9\lambda^2-\lambda^3 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

- Ainsi, dans le cas où $2 + \lambda \neq 0$, on obtient une réduite triangulaire supérieure.
Elle est non inversible ssi l'un de ses cœfficients diagonaux est nul. Ainsi, si $2 + \lambda \neq 0$:

$$A - \lambda I \text{ non inversible } \Leftrightarrow\; -53 + 27\lambda + 9\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

- Il reste à traiter le cas où $2+\lambda = 0$ (*i.e.* $\lambda = -2$).
  Dans ce cas, en reprenant le début du calcul précédent, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(A-\lambda I) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 23+\lambda & 6-(7-\lambda)(3-\lambda) \end{pmatrix}\right) \\ & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 21 & -39 \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_2 \leftrightarrow L3}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 0 & 21 & -39 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

  Ainsi, dans le cas où $2+\lambda = 0$, on obtient une réduite triangulaire supérieure dont les cœfficients diagonaux sont tous non nuls. La matrice $A - \lambda I$ est donc inversible dans ce cas.

$$\boxed{A - \lambda I \text{ non inversible ssi } -53 + 27\lambda + 9\lambda^2 - \lambda^3 = 0.}$$

Remarque

- Il était possible d'être plus astucieux lors du calcul du rang de la matrice $A - \lambda I$ afin de ne pas avoir à faire de disjonction de cas. On pouvait par exemple effectuer l'opération suivante :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(A-\lambda I) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 23+\lambda & -15+10\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 21 & -16+11\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 23+\lambda & -15+10\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

  On pouvait alors effectuer l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow 21 L_3 - (23+\lambda) L_2 \right.$ pour conclure.

- Il était aussi possible à cette étape d'utiliser une opération sur les colonnes :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(A-\lambda I) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 23+\lambda & -15+10\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{C_2 \leftarrow C_2 + C_3}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 4-\lambda & 3-\lambda \\ 0 & -3 & -1+\lambda \\ 0 & 8+11\lambda-\lambda^2 & -15+10\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

  On pouvait alors effectuer l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow 3 L_3 + (8+11\lambda-\lambda^2) L_2 \right.$ pour conclure.

- Cette question présentait une difficulté calculatoire relativement grande et assez inédite pour un sujet `EDHEC`. En contrepartie, le résultat attendu était fourni.
  Dans ce cas, la stratégie à adopter est la suivante :
  × écrire le calcul directement au propre.
    Il faut prendre le temps de le poser correctement et notamment de noter les opérations effectuées. Vous risquez de commettre des erreurs en opérant trop rapidement.
  × si le calcul n'aboutit pas rapidement, il ne faut pas s'acharner.
    Il suffit alors de signaler au correcteur que vous admettez ce résultat (vous pouvez brièvement expliquer ce que vous deviez obtenir et comment conclure dans ce cas).

  Passer la question n'étant pas pénalisant puisque le résultat était fourni. □

b) Étudier la fonction f qui, à tout réel x, associe $f(x) = x^3 - 9x^2 - 27x + 53$, puis dresser son tableau de variations.
(on précisera les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, on notera m le minimum local de f sur $\mathbb{R}$, M le maximum local de f sur $\mathbb{R}$ et on ne cherchera ni à calculer m, ni à calculer M)

Démonstration.

- La fonction f est polynomiale. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  $$f'(x) = 3x^2 - 18x - 27 = 3\ (x^2 - 6x - 9)$$
  Notons $P(X) = X^2 - 6X - 9$. Ce polynôme admet pour discriminant : $\Delta = 36 - (4 \times (-9)) = 72$.
  Notons que : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{72} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\ \sqrt{2}$. Le polynôme P admet pour racines :
  $$x_+ = \frac{6 + \sqrt{72}}{2} = 3 + 3\ \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad x_- = \frac{6 - \sqrt{72}}{2} = 3 - 3\ \sqrt{2}$$
  Ainsi : $f'(x) < 0 \ \Leftrightarrow\ x \in \,]x_-, x_+[$.
- On en déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		x_-		x_+		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

  Détaillons l'obtention des limites :
  $\times$ $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^3 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$
  $\times$ $f(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} x^3 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$

Remarque

- Ici, $P(X) = aX^2 + bX + c = X^2 - 6X - 9$. Le cœfficient b s'écrit naturellement sous la forme $b = 2 \times b'$ avec $b' = 3$. Ainsi, lorsque l'on calcule le déterminant, on obtient :
  $$\begin{array}{rcl} \Delta & = & (2b')^2 - 4\ ac \\ & = & 4\ (b')^2 - 4\ ac \\ & = & 4\ ((b')^2 - ac) \ = \ 4\ \Delta' \end{array}$$
  Ainsi : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4\Delta'} = 2\ \sqrt{\Delta'}$.
  Ainsi, on en déduit que :
  $$x_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b' - 2\sqrt{\Delta'}}{2a} = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$
  $$x_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b' + 2\sqrt{\Delta'}}{2a} = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$$
- On retiendra que si b s'écrit naturellement sous la forme $2b'$, alors les formules classiques pour x_- et x_+ peuvent se simplifier. Le réel Δ' est appelé discriminant réduit du polynôme P. S'il n'est pas obligatoire de connaître les formules associées au discriminant réduit, la simplification évoquée ci-dessus doit `TOUJOURS` être effectuée et il faudra systématiquement y penser lorsque b s'écrit sous la forme $2b'$.

$\square$

c) Calculer $f(0)$ et $f(3)$ puis déterminer les signes de m et M.

Démonstration.

- Tout d'abord :
  - $\times$ $f(0) = 53$.
  - $\times$ $f(3) = 3^3 - 9 \times 3^2 - 27 \times 3 + 53 = 27\ (1 - 3 - 3) + 53 = -135 + 53 = -82$.
- On remarque alors que :

$$\underbrace{3\ (1 - \sqrt{2})}_{= x_-} \quad < \quad 0 \quad < \quad 3 \quad < \quad \underbrace{3 + 3\ \sqrt{2}}_{= x_+}$$

- Or, sur $[x_-, x_+]$, la fonction f est strictement décroissante.
  On en déduit, par application de f :

$$f(x_-) > f(0) = 53 > 0 \qquad \text{et} \qquad f(x_+) < f(3) = -82 < 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } M = f(x_-) > 0 \text{ et } m = f(x_+) < 0.}$$

□

d) Montrer que $A - \lambda\ I$ n'est pas inversible pour exactement trois valeurs de λ, que l'on ne cherchera pas à calculer et que l'on notera λ_1, λ_2 et λ_3, avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

Démonstration.

- La fonction f est :
  - $\times$ continue sur $]-\infty, x_-]$,
  - $\times$ strictement croissante sur $]-\infty, x_-]$.

  On en déduit que f réalise une bijection de $]-\infty, x_-]$ sur $f(]-\infty, x_-])$. Or :

$$f(]-\infty, x_-]) \ = \ ]\lim_{x \to -\infty} f(x), f(x_-)] \ = \ ]-\infty, M]$$

  Or $0 \in \ ]-\infty, M]$, car, d'après la question précédente, $M > 0$.
  Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\lambda_1 \in \ ]-\infty, x_-]$.
- En procédant de même, on démontre que :
  - $\times$ l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\lambda_2 \in \ ]x_-, x_+]$.
  - $\times$ l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\lambda_3 \in \ ]x_+, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Par construction } \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3.}$$

D'après la question ***1.a)***, la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible ssi $f(\lambda) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } A - \lambda I \text{ n'est pas inversible ssi } \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}.}$$

□

e) **Seulement pour les cubes (les autres pourront se servir de ce résultat sans démonstration)** En déduire qu'il existe une matrice P inversible telle que :

$A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la matrice A admet 3 valeurs propres distinctes λ_1, λ_2, λ_3. Comme $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice A est diagonalisable.
- Ainsi, il existe une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que :
$$A \ = \ PDP^{-1}$$
La matrice D contient dans sa diagonale les valeurs propres de la matrice A.

$$\boxed{\text{Finalement, } A \ = \ PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.}$$

□

2. L'objectif de cette question est de déterminer l'ensemble E des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A c'est-à-dire qui vérifient $AM = MA$.

a) Montrer que les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales.

Démonstration.
Notons $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$.

- Tout d'abord :
$$DM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\, m_{11} & \lambda_1\, m_{12} & \lambda_1\, m_{13} \\ \lambda_2\, m_{21} & \lambda_2\, m_{22} & \lambda_2\, m_{23} \\ \lambda_3\, m_{31} & \lambda_3\, m_{32} & \lambda_3\, m_{33} \end{pmatrix}$$
- D'autre part :
$$MD = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\, m_{11} & \lambda_2\, m_{12} & \lambda_3\, m_{13} \\ \lambda_1\, m_{21} & \lambda_2\, m_{22} & \lambda_3\, m_{23} \\ \lambda_1\, m_{31} & \lambda_2\, m_{32} & \lambda_3\, m_{33} \end{pmatrix}$$
- Raisonnons par équivalence :
$$\begin{aligned} & DM = MD \\ \Leftrightarrow \ & \begin{pmatrix} \lambda_1\, m_{11} & \lambda_1\, m_{12} & \lambda_1\, m_{13} \\ \lambda_2\, m_{21} & \lambda_2\, m_{22} & \lambda_2\, m_{23} \\ \lambda_3\, m_{31} & \lambda_3\, m_{32} & \lambda_3\, m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\, m_{11} & \lambda_2\, m_{12} & \lambda_3\, m_{13} \\ \lambda_1\, m_{21} & \lambda_2\, m_{22} & \lambda_3\, m_{23} \\ \lambda_1\, m_{31} & \lambda_2\, m_{32} & \lambda_3\, m_{33} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \ & \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1\, m_{12} = \lambda_2\, m_{12} \\ \lambda_1\, m_{13} = \lambda_3\, m_{13} \\ \lambda_2\, m_{23} = \lambda_3\, m_{23} \\ \lambda_2\, m_{21} = \lambda_1\, m_{21} \\ \lambda_3\, m_{31} = \lambda_1\, m_{31} \\ \lambda_3\, m_{32} = \lambda_2\, m_{32} \end{array} \right. \end{aligned}$$

- Traitons l'une de ces contraintes :

$$\lambda_1 \ m_{12} = \lambda_2 \ m_{12} \ \Leftrightarrow \ (\lambda_1 - \lambda_2) \ m_{12} = 0 \ \overset{\lambda_1 \neq \lambda_2}{\Leftrightarrow} \ m_{12} = 0$$

On en déduit, en procédant de même, que : $m_{13} = m_{23} = m_{21} = m_{31} = m_{32} = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } M \text{ commute avec } D \text{ si seulement si } M \text{ est diagonale.}}$$

□

b) Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

(i) M est une matrice de E.

(ii) $P^{-1}MP$ commute avec D.

Démonstration.

$$\begin{array}{cll} & M \text{ est une matrice de } E & \\ \Leftrightarrow & M \text{ commute avec } A & \\ \Leftrightarrow & AM = MA & \\ \Leftrightarrow & PDP^{-1}M = MPDP^{-1} & \\ \Leftrightarrow & P^{-1}(PDP^{-1}M) = P^{-1}(MPDP^{-1}) & \textit{(en multipliant à gauche par } P^{-1}\textit{)} \\ \Leftrightarrow & DP^{-1}M = P^{-1}MPDP^{-1} & \\ \Leftrightarrow & (DP^{-1}M)P = (P^{-1}MPDP^{-1})P & \textit{(en multipliant à droite par } P^{-1}\textit{)} \\ \Leftrightarrow & D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } M \text{ est une matrice de } E \text{ si et seulement si } P^{-1}MP \text{ commute avec } D.}$$

□

c) Établir que toute matrice M de E est combinaison linéaire des trois matrices suivantes :

$$P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, \qquad P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, \qquad P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

Démonstration.

- D'après ce qui précède :

$$\begin{array}{cl} & M \text{ est une matrice de } E \\ \Leftrightarrow & P^{-1}MP \text{ commute avec } D \\ \Leftrightarrow & P^{-1}MP \text{ est diagonale} \\ \Leftrightarrow & \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \ P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \ M = P\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}P^{-1} \end{array}$$

- Or :

$$P\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}P^{-1} = a \cdot P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + b \cdot P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + c \cdot P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

Ainsi, $M \in E$ si et seulement si M est combinaison linéaire des matrices

$$P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},\ P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},\ P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

□

d) En déduire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$E = \text{Vect}\left(P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \right)$$

- La famille $\mathcal{F} = \left(P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \right)$ est donc génératrice de E. Démontrons que c'est une famille libre.

  Soit $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que :

$$\mu_1 \cdot P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + \mu_2 \cdot P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + \mu_3 \cdot P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = 0$$

  Alors en multipliant à gauche par P^{-1}, on obtient :

$$\mu_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + \mu_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = 0$$

  Et en multipliant à droite par P, on obtient :

$$\mu_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Ce qui équivaut à : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$.

La famille $\mathcal{F}$ est libre.

La famille $\mathcal{F}$ est :
× génératrice de E,
× libre.

La famille $\mathcal{F}$ est donc une base de E.

On en déduit que $\dim(E) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 3$.

□

e) **Seulement pour les cubes :** Montrer, en raisonnant sur les valeurs propres de A, qu'il n'existe aucun polynôme annulateur non nul de A de degré inférieur ou égal à 2.
En déduire que $(I,\ A,\ A^2)$ est une base de E.

Démonstration.

- Soit R un polynôme annulateur non nul de A. Alors :

$$\mathrm{Sp}(A) \ \subset\ \{\text{racines du polynôme } R\}$$

Ainsi, R admet au moins 3 racines : λ_1, λ_2, λ_3.

- On en déduit que R est multiple de $X - \lambda_1$, $X - \lambda_2$ et $X - \lambda_3$.
Plus précisément, il existe un polynôme $T \neq 0$ tel que :

$$R(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)\ T(X)$$

$$\boxed{\text{Tout polynôme annulateur non nul de } A \text{ est de degré supérieur ou égal à 3.}}$$

- Remarquons maintenant que les matrices I, A et A^2 commutent toutes avec A.
Ainsi, $\mathcal{F} = (I, A, A^2)$ est une famille d'éléments de E.
- Démontrons que $\mathcal{F}$ est une famille libre.

Soit $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que :

$$\mu_1 \cdot I + \mu_2 \cdot A + \mu_3 \cdot A^2 = 0$$

Ainsi, $R(X) = \mu_1 + \mu_2 X + \mu_3 X^2$ est un polynôme annulateur de A et est de degré inférieur ou égal à 2. D'après ce qui précède, ceci signifie que $R = 0$. D'où :

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$$

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F} \text{ est libre.}}$$

- La famille $\mathcal{F}$ est libre et est de cardinal 3 dans l'espace E de dimension $\dim(E) = 3$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{F} \text{ est une base de } E.}$$

□

III. Exercice 3 (EDHEC 2009)

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0,1[$ et on note $q = 1 - p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. On pose $Z = \inf(X, Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On rappelle que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $[Z > k] = [X > k] \cap [Y > k]$.

a) Pour tout entier naturel k, calculer $\mathbb{P}([Z > k])$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- D'après l'énoncé :

$$[Z > k] = [X > k] \cap [Y > k]$$

Par application de $\mathbb{P}$, on obtient :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z > k]) & = & \mathbb{P}([X > k] \cap [Y > k]) & \\ & = & \mathbb{P}([X > k]) \times \mathbb{P}([Y > k]) & \textit{(car les v.a.r. } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & (\mathbb{P}([X > k]))^2 & \textit{(car les v.a.r. } X \textit{ et } Y \textit{ ont même loi)} \\ & = & (1 - \mathbb{P}([X \leqslant k]))^2 & \end{array}$$

- Or, comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$:

$$[X \leqslant k] = \bigcup_{i=1}^{k} [X = i]$$

La famille $([X = i])_{i \in [\![1,k]\!]}$ est consitituée d'événements incompatibles. On obtient donc :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X \leqslant k]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} [X = i]\right) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}([X = i]) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} p\ (1-p)^{i-1} & \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\ & = & p \sum\limits_{i=1}^{k} (1-p)^{i-1} \ = \ p \sum\limits_{i=0}^{k-1} (1-p)^{i} & \\ & = & p \dfrac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} \ = \ \cancel{p} \dfrac{1-(1-p)^k}{\cancel{p}} & \\ & = & 1-(1-p)^k & \end{array}$$

- En remplaçant dans $\mathbb{P}([Z > k])$, on obtient :

$$\mathbb{P}([Z > k]) = \left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} - (1-p)^k\right)\right)^2 = \left((1-p)^k\right)^2 \ = \ (1-p)^{2k}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}([Z > k]) = q^{2k}}$$

Remarque
On aurait pu directement décomposer l'événement $[X > k]$.
Cela aurait donné la démonstration suivante. Tout d'abord :

$$[X > k] = \bigcup_{i=k+1}^{+\infty} [X = i]$$

La famille $([X = i])_{i \geqslant k+1}$ est consitituée d'événements incompatibles. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X > k]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=k+1}^{+\infty} [X = i]\right) \\
&= \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i]) \\
&= \sum_{i=k+1}^{+\infty} p\ (1-p)^{i-1} \qquad \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\
&= p \sum_{i=k+1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} \ = \ p \sum_{i=k}^{+\infty} (1-p)^{i} \\
&= p \times p^k \ \frac{1}{1-(1-p)} \ = \ \cancel{p} \frac{(1-p)^k}{\cancel{p}} \\
&= (1-p)^k
\end{aligned}$$

Les manipulations sur les sommes infinies sont ici licites car ces sommes représentent des probabilités d'événements. Les séries associéees sont donc convergentes. □

b) Établir que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, on a :

$$\mathbb{P}([Z = k]) = \mathbb{P}([Z > k-1]) - \mathbb{P}([Z > k])$$

Démonstration.
Soit $k \geqslant 1$.

- Tout d'abord :
$$[Z \geqslant k] = [Z > k] \cup [Z = k]$$
De plus, comme Z est à valeurs entières : $[Z \geqslant k] = [Z > k-1]$. Ainsi :
$$[Z > k-1] = [Z > k] \cup [Z = k]$$

- Les événements $[Z > k]$ et $[Z = k]$ sont incompatibles. On a donc :
$$\mathbb{P}([Z > k-1]) = \mathbb{P}([Z > k] \cup [Z = k]) = \mathbb{P}([Z > k]) + \mathbb{P}([Z = k])$$

$$\boxed{\forall k \geqslant 1,\ \mathbb{P}([Z = k]) = \mathbb{P}([Z > k-1]) - \mathbb{P}([Z > k])}$$

Remarque
L'égalité entre événements suivante :

$$[Z > k-1] = [Z > k] \cup [Z = k]$$

est valable pour toute variable à valeurs entières. Elle est extrêmement classique et utile dans les sujets. On s'efforcera donc de la retenir. □

c) En déduire que Z suit la loi géométrique de paramètre $(1-q^2)$.

Démonstration.

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ car les v.a.r. X et Y suivent une loi géométrique.
  Comme $Z = \inf(X, Y)$, on a alors : $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z = k]) & = & \mathbb{P}([Z > k-1]) - \mathbb{P}([Z > k]) & \textit{(question } \textbf{\textit{1.b)}}\textit{)} \\ & = & q^{2(k-1)} - q^{2k} & \textit{(question } \textbf{\textit{1.a)}}\textit{)} \\ & = & q^{2k-2} - q^{2k} \ = \ q^{2k-2}\left(1-q^2\right) & \\ & = & (q^2)^{k-1}(1-q^2) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } Z \text{ suit la loi géométrique de paramètre } (1-q^2).}$$

□

2. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante :
Pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel pair, on pose $T(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{2}$,
et, pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel impair, on pose $T(\omega) = \dfrac{1 + X(\omega)}{2}$.
On admet que T est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) Montrer que T prend des valeurs entières non nulles.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. Alors $X(\omega) \in X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Deux cas se présentent alors :

- si $X(\omega)$ est un entier pair : alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $X(\omega) = 2k$.
  On note au passage que $k \neq 0$ car $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc $0 \notin X(\Omega)$.
  Alors $T(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{2} = \dfrac{2k}{2} = k$, donc $T(\omega)$ est un entier naturel non nul.
- si $X(\omega)$ est un entier impair : alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $X(\omega) = 2k + 1$.
  Alors $T(\omega) = \dfrac{X(\omega) + 1}{2} = \dfrac{2k + 2}{2} = k + 1$, donc $T(\omega)$ est un entier naturel non nul.

$$\boxed{T \text{ prend des valeurs entiers non nulles : } T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*.}$$

□

b) Réciproquement, justifier que tout entier naturel k non nul est élément de $T(\Omega)$ et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et que $2k \in \mathbb{N}^*$, alors il existe $\omega \in \Omega$ tel que : $X(\omega) = 2k$.
  Dans ce cas :
  $$T(\omega) = \frac{X(\omega)}{2} = \frac{2k}{2} = k$$
  Et ainsi, $k = T(\omega) \in T(\Omega)$.
  $$\boxed{\text{Tout entier naturel non nul est élément de } T(\Omega) \text{ ainsi : } \mathbb{N}^* \subset T(\Omega).}$$
- Or, d'après la question ***2.a)***, $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{On en conclut que : } T(\Omega) = \mathbb{N}^*.}$$

□

c) Exprimer l'événement $[T = k]$ en fonction de certains événements $[X = i]$ puis montrer que T suit la même loi que Z.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
L'événement $[T = k]$ est réalisé :

× si l'événement $[X = 2k]$ est réalisé.
En effet, pour tout $\omega \in [X = 2k]$, $X(\omega)$ est paire, et alors :

$$T(\omega) = \frac{X(\omega)}{2} = \frac{2k}{2} = k$$

× ou si l'événement $[X = 2k - 1]$ est réalisé.
En effet, pour tout $\omega \in [X = 2k - 1]$, $X(\omega)$ est impaire, et alors :

$$T(\omega) = \frac{X(\omega) + 1}{2} = \frac{2k - \cancel{1} + \cancel{1}}{2} = k$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ [T = k] = [X = 2k] \cup [X = 2k - 1]}$$

- On rappelle que : $T(\Omega) = \mathbb{N}^* = \mathbb{Z}(\Omega)$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  Les événements $[X = 2k]$ et $[X = 2k - 1]$ sont incompatibles. On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T = k]) &= \mathbb{P}([X = 2k] \cup [X = 2k - 1]) \\
&= \mathbb{P}([X = 2k]) + \mathbb{P}([X = 2k - 1]) \\
&= q^{2k-1}\, p + q^{2k-2}\, p && \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\
&= q^{2k-2}\, (qp + p) \ = \ q^{2k-2}\, (q(1-q) + (1-q)) \\
&= (q^2)^{k-1}\, (1 - q^2) \\
&= \mathbb{P}([Z = k])
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } T \text{ suit bien la même loi que } Z.}$$

□

3. On rappelle que la fonction `rand` renvoie de façon uniforme un réel aléatoire élément de $[0, 1[$.
Par ailleurs, la commande `modulo(x,2)` permet de tester si `x` est pair. Plus précisément :

× `x` est pair si et seulement si `modulo(x,2)` vaut 0,

× `x` est impair si et seulement si `modulo(x,2)` vaut 1.

Compléter le programme suivant pour que, d'une part, il simule les lancers d'une pièce donnant « pile » avec la probabilité p et calcule la valeur prise par la variable aléatoire X égale au rang du premier « pile » obtenu lors de ces lancers (X suit bien la loi géométrique de paramètre p) et pour que, d'autre part, il calcule et affiche la valeur prise par T, la variable aléatoire T ayant été définie dans la deuxième question.

```
1  x = 1
2  lancer = rand()
3  while lancer <= 1-p
4      x = ...........
5      lancer = rand()
6  end
7  if modulo(x,2) == 0 then
8      ............
9  else
10     ............
11 end
12 disp(t)
```

Démonstration.

- La variable `lancer` contient les appels successifs à la fonction `rand`.
  Or, la fonction `rand` permet de simuler une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.
  Ainsi, à chaque tour de boucle, le test `lancer <= 1-p` est réussi avec une probabilité :

$$\mathbb{P}([0 \leqslant U \leqslant 1-p]) = 1-p$$

  Le succès de ce test correspond donc à l'échec d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p.
  Inversement, l'échec de ce test correspond au succès d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

- À chaque tour de boucle, la variable `x` est incrémentée (de 1) lorsque le test est réussi.
  Autrement dit, à chaque échec d'une nouvelle épreuve de Bernoulli de paramètre p.
  On sort de la boucle lors du premier échec du test *i.e.* lors du premier succès de l'expérience. de l'épreuve de Bernoulli. Ainsi, la variable `x` contient, en sortie de boucle, le rang d'apparition du premier succès.

  $\boxed{\text{La variable } \texttt{x} \text{ permet de simuler la v.a.r. } X.}$

- On souhaite que `t` simule la v.a.r. T. Donc :
  - × si `x` est pair, alors `t` doit recevoir `x/2`.
  - × si `x` est impair, alors `t` doit recevoir `(1+x)/2`

  Il fallait donc modifier les lignes comme suit.

```
4      x = x + 1
```

```
7  if modulo(x,2) == 0 then
8      t = x/2
9  else
10     t = (1 + x)/2
```

Remarque

- On a traduit ici en **Scilab** une question qui était posée à l'époque en Turbo-Pascal, langage qui ne dispose pas d'une fonction de type `grand`.
- En réalité, on aurait pu remplacer les 6 premières lignes du programme par : `x = grand(1,1,geom,p)`, ce qui correspond aux attentes du programme actuel. □

IV. Exercice 4 (EDHEC 2011)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.
Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. a) Pour tout i et tout k, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on note $U_{i,k}$ l'évènement « l'urne numéro i est choisie à la $k^{\text{ème}}$ épreuve ».
Écrire l'évènement $[X_i = 1]$ à l'aide de certains des évènements $U_{i,k}$, puis montrer que :

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \ \mathbb{P}([X_i = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

- L'urne i contienne n boules à la fin de n tirages si et seulement si elle n'est choisie à aucun tirage. Ainsi l'événement $[X_i = 1]$ est réalisé si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'événement $U_{i,k}$ n'est pas réalisé.

$$\boxed{\text{On a donc : } [X_i = 1] = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k}}.}$$

- Soient $k \in [\![1, n]\!]$.
À chaque tirage, on choisit une urne de manière équiprobable parmi les n urnes disponibles. Ainsi : $\mathbb{P}(U_{i,k}) = \dfrac{1}{n}$. On en déduit :

$$\mathbb{P}\left(\overline{U_{i,k}}\right) = 1 - \mathbb{P}(U_{i,k}) = 1 - \frac{1}{n}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_i = 1]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k}}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{U_{i,k}}\right) && \textit{(car les choix des urnes sont indépendants)} \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) && \textit{(d'après les calculs précédents)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!], \ \mathbb{P}([X_i = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}$$

□

b) Justifier également que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on a :

$$\mathbb{P}\left([X_i = 1] \cap [X_j = 1]\right) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

Démonstration.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

- L'événement $[X_i = 1] \cap [X_j = 1]$ est réalisé si et seulement si auncune des deux urnes i et j n'est choisie lors des tirages, *i.e.* si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\overline{U_{i,k}} \cap \overline{U_{j,k}}$ est réalisé. Ainsi :
$$[X_i = 1] \cap [X_j = 1] = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k}} \cap \overline{U_{j,k}} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k} \cup U_{j,k}}$$
- Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
Les événements $U_{i,k}$ et $U_{j,k}$ sont incompatibles (on ne peut pas choisir en même temps les urnes i et j sur un seul tirage). On en déduit :
$$\mathbb{P}(U_{i,k} \cup U_{j,k}) = \mathbb{P}(U_{i,k}) + \mathbb{P}(U_{j,k}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$
Enfin :
$$\mathbb{P}\Big(\overline{U_{i,k} \cup U_{j,k}}\Big) = 1 - \mathbb{P}(U_{i,k} \cup U_{j,k}) = 1 - \frac{2}{n}$$
- En combinant ces résultats, on obtient :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k} \cup U_{j,k}}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\Big(\overline{U_{i,k} \cup U_{j,k}}\Big) && \textit{(car les choix des urnes sont indépendants)} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{2}{n}\right) && \textit{(d'après les calculs précédents)} \\
&= \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j,\ \mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n}$$

□

c) Comparer $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ et $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ et en déduire que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, alors les variables X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

Démonstration.

- Pour comparer $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ et $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$, on étudie le signe de leur différence.

$$1 - \frac{2}{n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = \cancel{1} - \cancel{\frac{2}{n}} - \left(\cancel{1} - \cancel{\frac{2}{n}} + \frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{n^2} < 0$$

$$\boxed{1 - \frac{2}{n} < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}$$

- Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.
D'après la question ***1.b)***, on sait que :

$$\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

D'après la question ***1.a)***, on sait que :

$$\mathbb{P}([X_i = 1])\ \mathbb{P}([X_j = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right)^n$$

- Or, d'après le point précédent : $1 - \dfrac{2}{n} < \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^2$.

Par stricte croissance de la fonction élévation à la puissance n sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n < \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right)^n$$

- On en déduit que :

$$\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) \ \neq\ \mathbb{P}([X_i = 1])\ \mathbb{P}([X_j = 1])$$

$$\boxed{\text{Les v.a.r. } X_i \text{ et } X_j \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

□

2. On pose $Y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

a) Déterminer l'espérance de Y_n, notée $\mathbb{E}(Y_n)$.

Démonstration.

- Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, X_i admet une espérance car c'est une v.a.r. finie ($X_i(\Omega) = \{0,1\}$).
La v.a.r. Y_n admet une espérance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent.
- Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

Or, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\mathbb{E}(X_i) = \cancel{0 \times \mathbb{P}([X_i = 0])} + 1 \times \mathbb{P}([X_i = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

- On obtient alors :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}$$

□

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathbb{E}(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $\mathbb{E}(Y_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{n} &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \exp\left(\ln\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)\right) \\ &= \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

- De plus, on sait que $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$.

  Or $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$, donc $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$. D'où :

$$n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \cancel{n} \times \left(-\frac{1}{\cancel{n}}\right) = -1$$

  Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n\right) = -1$.

  Enfin, comme la fonction exp est continue en -1, donc, par composition de **limites** :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-1}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{n} = \mathrm{e}^{-1}.}$$

- On sait que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathbb{E}(Y_n)}{n} = \mathrm{e}^{-1}$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathbb{E}(Y_n)}{\mathrm{e}^{-1}\, n} = 1$.

  D'où : $\mathbb{E}(Y_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-1}\, n$.

$$\boxed{\text{Autrement dit : } \mathbb{E}(Y_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n}{\mathrm{e}}.}$$

□

3. Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.

a) Donner sans calcul la loi de N_i ainsi que la valeur de $\mathbb{E}(N_i)$.

Démonstration.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

- L'expérience consiste à effectuer n épreuves successives ayant deux issues :
  - × l'une est nommée succès (choisir l'urne i) et se produit avec probabilité $\frac{1}{n}$.
  - × l'autre est nommée échec (choisir une urne différente de i) et se produit avec probabilité $1 - \frac{1}{n}$.

  Ces n épreuves sont indépendantes d'après l'énoncé.

- La v.a.r. N_i compte le nombre de succès de cette expérience.

  Elle suit donc une loi binomiale de paramètre (n, p).

$$\boxed{N_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(N_i) = n \times \frac{1}{n} = 1.}$$

□

b) Que vaut le produit $N_i X_i$?

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Deux cas se produisent.

- Si l'urne i contient encore n boules à la fin des n tirages, alors :
  - $\times$ $N_i = 0$ puisqu'il n'y a aucune boule manquante dans l'urne i.
  - $\times$ $X_i = 1$ par définition de X_i.

  On obtient dans ce cas : $N_i X_i = 0$.
- Si l'urne i ne contient pas n boules à la fin des tirages, alors :
  - $\times$ $N_i = k$ où k est le nombre de boules manquantes dans l'urne i.
  - $\times$ $X_i = 0$ car l'urne i ne contient pas n boules.

  Dans ce cas, on obtient encore : $N_i X_i = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } N_i X_i = 0.}$$

□

c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

- La v.a.r. $N_i X_i$ admet une espérance car c'est une v.a.r. finie (c'est en fait la v.a.r. constante égale à 0). De plus : $\mathbb{E}(N_i X_i) = 0$.
- D'après la question ***2.a)***, $\mathbb{E}(X_i) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.

  D'après la question ***3.a)***, $\mathbb{E}(N_i) = 1$.

$$\mathbb{E}(N_i)\ \mathbb{E}(X_i) = 1 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \neq 0 \ = \ \mathbb{E}(N_i X_i)$$

$$\boxed{\text{Comme } \mathbb{E}(N_i X_i) \neq \mathbb{E}(N_i)\ \mathbb{E}(X_i), \text{ les v.a.r. } N_i \text{ et } X_i \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Remarque
On pouvait aussi revenir à la définition de l'indépendance. Par exemple :

- D'après la question ***3.b)*** : $N_i X_i = 0$.
  On remarque alors que :
  $$[N_i = 1] \cap [X_i = 1] = [N_i X_i = 1]$$
  Ainsi :
  $$\mathbb{P}([N_i = 1] \cap [X_i = 1]) = \mathbb{P}([N_i X_i = 1]) = 0$$
- Or, d'après la question ***2.a)*** :
  $$\mathbb{P}([X_i = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$
  et d'après la question ***3.a)*** :
  $$\mathbb{P}([N_i = 1]) = \binom{n}{1} \left(\frac{1}{n}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \cancel{n} \frac{1}{\cancel{n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$$
- Finalement :
  $$\mathbb{P}([N_i = 1])\ \mathbb{P}([X_i = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n-1} \neq 0 = \mathbb{P}([N_i = 1] \cap [X_i = 1])$$

□

4. On rappelle que `grand(1,1,'uin',1,n)` renvoie au hasard un entier de $[\![1,n]\!]$.
Compléter le programme informatique suivant pour qu'il simule l'expérience décrite au début de cet exercice et affiche les valeurs prises par X_1 et N_1 pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
1  n = input('Donnez un entier naturel n supérieur ou égal à 2')
2  n1 = 0
3  x1 = 1
4  for k = 1:n
5      hasard = grand(1,1,'uin',1,n)
6      if hasard == 1 then
7          x1 = .........
8          n1 = .........
9      end
10 end
11 disp(x1)
12 disp(n1)
```

Démonstration.

- Le programme consiste à simuler les v.a.r. N_1 et X_1. Ainsi, les variables `n1` et `x1` doivent contenir à la fin du programme une réalisation des v.a.r. N_1 et X_1.
- La boucle `for` du programme permet de simuler les n tirages successifs. À chaque tour de boucle, les variables `x1` et `n1` doivent être mises à jour. Détaillons ce point :
  - × en ligne 5, la variable `hasard` contient une valeur entière aléatoirement choisie entre 1 et n. Cette instruction permet de simuler le choix aléatoire du numéro de l'urne dans laquelle on tire une boule à chaque tirage.
  - × si l'urne choisie est la numéro 1 (ligne 6), alors :
    - l'urne 1 ne contient plus n boules. La variable `x1` doit donc être affectée à 0 (ligne 7).

```
7          x1 = 0
```

    - il y a donc une boule manquante supplémentaire pour l'urne 1. La variable `n1` qui compte le nombre de boules manquantes dans l'urne 1 doit donc être incrémentée de 1 (ligne 8).

```
8          n1 = n1 + 1
```

- Le programme se termine par l'affichage des variables `n1` et `x1` (lignes 11 et ligne 12).

□