DS3 (version B)

I. Exercice 1

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p, $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$.
On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise (toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant).

1. On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

a) Quelles sont les lois des variables aléatoires N_V et N_B ?

b) Les variables aléatoires N_V et N_B sont-elles indépendantes ?

On définit le couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ de la façon suivante.
Pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $[X = i] \cap [Y = j]$ est l'événement :

« les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i+j+1)^{\text{ème}}$ est blanche

ou

les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i+j+1)^{\text{ème}}$ est verte. »

Par exemple, pour la suite de tirages $BBBVVBVBB\cdots$ (où V est mis pour vert et B pour blanc), on a $X = 3$ et $Y = 2$.

2. *a)* Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

b) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{p}{1-p} + \dfrac{1-p}{p}$.

c) Montrer que $\mathbb{E}(X)$ est minimale lorsque $p = \dfrac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.

3. Montrer, pour tout (i, j) de $(\mathbb{N}^*)^2$:

$$\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

4. *a)* En déduire la loi de la variable aléatoire Y.

b) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance que l'on calculera.

5. *a)* Établir que, si $p \neq \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
(On pourra envisager $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1])$)

b) Démontrer que, si $p = \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

II. Exercice 2

On note I la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer que la matrice $A - \lambda\, I$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0$.

b) Étudier la fonction f qui, à tout réel x, associe $f(x) = x^3 - 9x^2 - 27x + 53$, puis dresser son tableau de variations.
(on précisera les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, on notera m le minimum local de f sur $\mathbb{R}$, M le maximum local de f sur $\mathbb{R}$ et on ne cherchera ni à calculer m, ni à calculer M)

c) Calculer $f(0)$ et $f(3)$ puis déterminer les signes de m et M.

d) Montrer que $A - \lambda\, I$ n'est pas inversible pour exactement trois valeurs de λ, que l'on ne cherchera pas à calculer et que l'on notera λ_1, λ_2 et λ_3, avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

e) **Seulement pour les cubes (les autres pourront se servir de ce résultat sans démonstration)** : En déduire qu'il existe une matrice P inversible telle que

$A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

2. L'objectif de cette question est de déterminer l'ensemble E des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A c'est-à-dire qui vérifient $AM = MA$.

a) Montrer que les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales.

b) Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

(i) M est une matrice de E.

(ii) $P^{-1}MP$ commute avec D.

c) Établir que toute matrice M de E est combinaison linéaire des trois matrices suivantes :

$$P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, \qquad P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, \qquad P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

d) En déduire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

e) **Seulement pour les cubes :** Montrer, en raisonnant sur les valeurs propres de A, qu'il n'existe aucun polynôme annulateur non nul de A de degré inférieur ou égal à 2. En déduire que $(I,\ A,\ A^2)$ est une base de E.

III. Problème

Soit p un réel de $]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p (d'espérance $\dfrac{1}{p}$).
On pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$. On rappelle que $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

1. a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $\mathbb{V}(X_1)$ et de $\mathbb{P}([X_1 \leqslant k])$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.

b) Calculer $\mathbb{E}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{E}(X_1 - X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 - X_2)$.

c) Établir la relation : $\mathbb{P}([X_1 = X_2]) = \dfrac{p}{1+q}$.

2. a) Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.
En déduire $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{V}(Z)$ et $\mathbb{E}(T)$.

b) Soit k un entier de $\mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité : $[Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k]$.

En déduire la relation suivante : $\mathbb{P}([T = k]) = 2\ \mathbb{P}([X_1 = k]) - \mathbb{P}([Z = k])$.

c) Établir la formule : $\mathbb{V}(T) = \dfrac{q(2q^2 + q + 2)}{(1 - q^2)^2}$.

3. a) Préciser $(T - Z)(\Omega)$. Exprimer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'évènement $[Z = j] \cap [Z = T]$ en fonction des évènements $[X_1 = j]$ et $[X_2 = j]$.

En déduire pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $\mathbb{P}([Z = j] \cap [Z = T])$.

b) Montrer que pour tout couple (j, l) de $(\mathbb{N}^*)^2$, on a : $\mathbb{P}([Z = j] \cap [T - Z = l]) = 2p^2 q^{2j+l-2}$.

c) Montrer que pour tout k de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) = \dfrac{pq^{|k|}}{1+q}$.
(on distinguera trois cas : $k = 0$, $k > 0$ et $k < 0$)

d) En déduire la loi de la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$.

e) Établir à l'aide des questions précédentes que les variables Z et $T - Z$ sont indépendantes.

4. a) À l'aide du résultat de la question ***3.e)***, calculer $\mathrm{Cov}(Z, T)$.
Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?

b) Calculer en fonction de q, le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T.

c) Déterminer la loi de probabilité du couple (Z, T).

d) Déterminer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, la loi de probabilité conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.

e) Soit j un élément de $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeur dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.
Calculer $\mathbb{E}(D_j)$.