DS3 (version B) / 168

I. Exercice 1 /46

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p, $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$.
On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise (toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant).

1. On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

a) Quelles sont les lois des variables aléatoires N_V et N_B ?

- **1 pt : loi de N_V**
- **1 pt : loi de N_B**
- **1 pt : justification**

b) Les variables aléatoires N_V et N_B sont-elles indépendantes ?

- **2 pts : 1 pt pour penser à introduire un couple particulier, 1 pt pour le reste**

On définit le couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ de la façon suivante.
Pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $[X = i] \cap [Y = j]$ est l'événement :

« les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i+j+1)^{\text{ème}}$ est blanche

ou

les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i+j+1)^{\text{ème}}$ est verte. »

Par exemple, pour la suite de tirages $BBBVVBVBB\cdots$ (où V est mis pour vert et B pour blanc), on a $X = 3$ et $Y = 2$.

2. ***a)*** Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

- **1 pt : introduction des événements V_k et B_k**
- **1 pt : décomposition de $[X = i] \cap [Y = j]$**
- **3 pts : $[X = i] = [N_V = i+1] \cup [N_B = i+1]$ (en fonction des explications)**
- **2 pts : passage aux probabilités (1 pt : incompatibilité, 1 pt : loi de N_V)**

b) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{p}{1-p} + \dfrac{1-p}{p}$.

- **1 pt : citer l'absolue convergence**
- **1 pt : séries géométriques dérivées convergentes**
- **1 pt : X admet une espérance**
- **2 pts : 1 pour la formule des sommes géométriques, 1 pour le reste**

c) Montrer que $\mathbb{E}(X)$ est minimale lorsque $p = \dfrac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.

- **1 pt : f dérivable comme somme (même pour une explication sommaire)**
- **1 pt : calcul de f'**
- **1 pt : signe de $f'(x)$**
- **1 pt : calcul de $f(\frac{1}{2})$**
- **1 pt : conclusion**

3. Montrer, pour tout (i, j) de $(\mathbb{N}^*)^2$:

$$\mathbb{P}\left([X = i] \cap [Y = j]\right) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

- **(1 pt : introduction des V_k et B_k si non fait précédemment)**
- **2 pts : expression $[X = i] \cap [Y = j]$**
- **1 pt : incompatibilité (citée)**
- **1 pt : indépendance des lancers**
- **2 pts : calcul**

4. *a)* En déduire la loi de la variable aléatoire Y.

- **1 pt : donnée du SCE**
- **1 pt : écriture de la FPT**
- **1 pt : séries géométriques convergentes**
- **2 pts : 1 pt pour décalage d'indice, 1 pt pour somme des séries géométriques**

b) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance que l'on calculera.

- **1 pt : citer l'absolue convergence**
- **1 pt : séries géométriques dérivées premières convergentes**
- **1 pt : Y admet une espérance**
- **1 pt : reste du calcul**

5. *a)* Établir que, si $p \neq \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
(On pourra envisager $\mathbb{P}\left([X = 1] \cap [Y = 1]\right)$)

- **1 pt : calcul de $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1])$**
- **1 pt : calcul de $\mathbb{P}([X = 1])\mathbb{P}([Y = 1])$**
- **3 pts : 1 pt pour raisonner sur des égalités, 1pt pour simplifier, 1 pt conclure**

b) Démontrer que, si $p = \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

- **1 pt : calcul de $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$**
- **1 pt : calcul de $\mathbb{P}([X = i])$**
- **1 pt : calcul de $\mathbb{P}([Y = j])$**
- **1 pt : conclusion**

II. Exercice 2 /33 (/41 pour les cubes)

On note I la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer que la matrice $A - \lambda\, I$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0$.

- **1 pt : cas** $\lambda = 2$
- **3 pts : reste**

b) Étudier la fonction f qui, à tout réel x, associe $f(x) = x^3 - 9x^2 - 27x + 53$, puis dresser son tableau de variations.
(on précisera les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, on notera m le minimum local de f sur $\mathbb{R}$, M le maximum local de f sur $\mathbb{R}$ et on ne cherchera ni à calculer m, ni à calculer M)

- **1 pt : dérivabilité + dérivée de** f
- **1 pt : racines**
- **1 pt : variations de** f
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

c) Calculer $f(0)$ et $f(3)$ puis déterminer les signes de m et M.

- **1 pt :** $f(0)$
- **1 pt :** $f(3)$
- **1 pt : stricte décroissance de** f
- **1 pt : conclusion**

d) Montrer que $A - \lambda\, I$ n'est pas inversible pour exactement trois valeurs de λ, que l'on ne cherchera pas à calculer et que l'on notera λ_1, λ_2 et λ_3, avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

- **3 pts : 1er théorème de la bijection (1 pt : hypothèse, 1 pt : intervalle image, 1 pt :** $0 \in]-\infty, M]$**)**
- **2 pts : de même sur les** 2 **autres intervalles**
- **1 pt : rappeler la question *1.a)***

e) **Seulement pour les cubes (les autres pourront se servir de ce résultat sans démonstration)** : En déduire qu'il existe une matrice P inversible telle que
$A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

- **1 pt :** A **est diagonalisable**
- **1 pt : relation de similitude**

2. L'objectif de cette question est de déterminer l'ensemble E des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A c'est-à-dire qui vérifient $AM = MA$.

a) Montrer que les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales.

- **1 pt : calcul de** DM
- **1 pt : calcul de** MD
- **1 pt : résolution du système**
- **1 pt :** $\lambda_1 \neq \lambda_2$

b) Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

(i) M est une matrice de E.

(ii) $P^{-1}MP$ commute avec D.

- **1 pt : raisonnement par équivalence (ou double implication)**
- **1 pt : calcul**

c) Établir que toute matrice M de E est combinaison linéaire des trois matrices suivantes :

$$P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1},\qquad P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1},\qquad P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$$

- **1 pt : pour lien avec $P^{-1}MP$ (*2.b)*)**
- **1 pt : pour lien avec diagonale (*2.a)*)**
- **1 pt : expression de M**
- **1 pt : pour la combinaison linéaire**

d) En déduire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

- **1 pt : écriture sous forme de sev engendré**
- **2 pts : liberté de la famille (1 pt pour la déf, 1 pt pour multiplier à gauche /droite par P^{-1} et P)**
- **1 pt : conclure que c'est une base (génératrice + libre)**
- **1 pt : dimension de E**

e) **Seulement pour les cubes :** Montrer, en raisonnant sur les valeurs propres de A, qu'il n'existe aucun polynôme annulateur non nul de A de degré inférieur ou égal à 2. En déduire que $(I,\ A,\ A^2)$ est une base de E.

- **1 pt : relation $\mathrm{Sp}(A) \subset \{$racines d'un polynôme annulateur$\}$ (pas égalité !)**
- **1 pt : R multiple de $(X-\lambda_1)$, $(X-\lambda_2)$ et $(X-\lambda_3)$**
- **1 pt : les éléments de $\mathcal{F}$ appartiennent à E**
- **2 pts : liberté de $\mathcal{F}$**
- **1 pt : la famille $\mathcal{F}$ est libre et de bon cardinal, donc c'est une base de E**

III. Problème /89

Soit p un réel de $]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p (d'espérance $\frac{1}{p}$).
On pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$. On rappelle que $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

1. a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $\mathbb{V}(X_1)$ et de $\mathbb{P}([X_1 \leqslant k])$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.

- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_1)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_1 \leqslant k])$

b) Calculer $\mathbb{E}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{E}(X_1 - X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 - X_2)$.

- **1 pt : existence de tous les objets**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_1 + X_2)$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_1 - X_2)$
- **2 pts :** $\mathbb{V}(X_1 - X_2)$ **(1 pt indépendance, 1 pt calcul)**

c) Établir la relation : $\mathbb{P}([X_1 = X_2]) = \dfrac{p}{1+q}$.

- **1 pt : SCE**
- **1 pt : FPT écrite correctement**
- **1 pt : indépendance**
- **1 pt : somme d'une série géométrique**
- **1 pt : résultat**

2. a) Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.
En déduire $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{V}(Z)$ et $\mathbb{E}(T)$.

- **1 pt : support**
- **1 pt :** $[Z > k] \ = \ [X_1 > k] \cap [X_2 > k]$
- **1 pt : indépendance**
- **1 pt : résultat**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z > 0])$
- **1 pt :** $[Z \geqslant k] = [Z > k] \cup [Z = k]$
- **1 pt :** $[Z > k-1] = [Z = k] \cup [Z > k]$
- **1 pt : incompatibilité**
- **1 pt :** $Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - q^2\right)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Z)$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(Z)$
- **1 pt : existence de** $\mathbb{E}(T)$
- **1 pt : valeur de** $\mathbb{E}(T)$

b) Soit k un entier de $\mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité : $[Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k]$.

En déduire la relation suivante : $\mathbb{P}([T = k]) = 2\ \mathbb{P}([X_1 = k]) - \mathbb{P}([Z = k])$.

- **1 pt : justification même vague de l'égalité**
- **1 pt : formule du crible pour** $\mathbb{P}([Z = k] \cup [T = k])$
- **1 pt :** $[Z = k] \cap [T = k] \ = \ [X_1 = k] \cap [X_2 = k]$
- **1 pt : formule du crible pour** $\mathbb{P}([X_1 = k] \cup [X_2 = k])$
- **1 pt :** X_1 **et** X_2 **suivent la même loi**
- **1 pt : conclusion**

c) Établir la formule : $\mathbb{V}(T) = \dfrac{q(2q^2 + q + 2)}{(1 - q^2)^2}$.

- **1 pt : support de** T
- **1 pt : notion de convergence absolue**
- **1 pt : reconnaître les moments d'ordre 2 de** X_1 **et** Z
- **1 pt : formule de KH** $\mathbb{E}(X_1^2) = \mathbb{V}(X_1) + (\mathbb{E}(X_1))^2$
- **1 pt : calcul de** $\mathbb{E}(T^2)$
- **1 pt : formule de KH** $\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}(T^2) - \big(\mathbb{E}(T)\big)^2$
- **2 pts : valeur de** $\mathbb{V}(T)$

3. a) Préciser $(T - Z)(\Omega)$. Exprimer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'évènement $[Z = j] \cap [Z = T]$ en fonction des évènements $[X_1 = j]$ et $[X_2 = j]$.

En déduire pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $\mathbb{P}([Z = j] \cap [Z = T])$.

- **2 pts : support de** $T - Z$ **(1 pt valeurs entières, 1 pt valeurs positives)**
- **1 pt :** $[Z = j] \ \cap \ [Z = T] = [X_1 = j] \ \cap \ [X_2 = j]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z = j] \ \cap \ [Z = T])$ **par indépendance de** X_1 **et** X_2

b) Montrer que pour tout couple (j, l) de $(\mathbb{N}^*)^2$, on a : $\mathbb{P}([Z = j] \cap [T - Z = l]) = 2p^2 q^{2j+l-2}$.

- **1 pt :** $[Z = j] \ \cap \ [T - Z = l]$
- **1 pt : incompatibilité**
- **1 pt : indépendance de** X_1 **et** X_2
- **1 pt : calcul**

c) Montrer que pour tout k de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) = \dfrac{pq^{|k|}}{1 + q}$.

(on distinguera trois cas : $k = 0$, $k > 0$ et $k < 0$)

- **1 pt : cas** $k = 0$
- **1 pt : SCE**
- **1 pt : FPT**
- **1 pt : indépendance**
- **2 pts : reste du calcul**
- **2 pts : découpage de la somme**
- **2 pts : reste du calcul**

d) En déduire la loi de la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$.

- **1 pt : support**
- **1 pt :** $[\ |X_1 - X_2| = k] \ = \ [X_1 - X_2 = k] \ \cup \ [X_1 - X_2 = -k]$
- **1 pt : cas** $k \neq 0$
- **1 pt : cas** $k = 0$

e) Établir à l'aide des questions précédentes que les variables Z et $T - Z$ sont indépendantes.

- **2 pts : cas** $l \neq 0$
- **2 pts : cas** $l = 0$

4. a) À l'aide du résultat de la question ***3.e)***, calculer $\text{Cov}(Z, T)$.
Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?

- **1 pt :** $\text{Cov}(Z, T - Z) = 0$
- **1 pt : linéarité à gauche**
- **1 pt :** $\text{Cov}(Z, Z) = \mathbb{V}(Z)$
- **1 pt : conclusion**

b) Calculer en fonction de q, le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T.

- **1 pt : définition**
- **2 pts : calcul**

c) Déterminer la loi de probabilité du couple (Z, T).

- **1 pt : cas** $i < j$
- **2 pts : cas** $i = j$
- **2 pts : cas** $i > j$

d) Déterminer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, la loi de probabilité conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.

- **1 pt : formule proba conditionnelle**
- **1 pt : cas** $i = j$
- **2 pts : cas** $i > j$

e) Soit j un élément de $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeur dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.
Calculer $\mathbb{E}(D_j)$.

- **1 pt : absolue convergence**
- **2 pts : découpage de somme (dont 1 pt pour** $N > j$**)**
- **2 pts : faire apparaître la somme partielle d'une série géométrique dérivée première convergente**
- **2 pts : calcul de l'espérance**