DS3 (version B)

I. Exercice 1 (EML 1998)

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher.
La proportion de boules vertes est p, $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$.
On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise (toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant).

1. On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

a) Quelles sont les lois des variables aléatoires N_V et N_B ?

Démonstration.

- L'expérience aléatoire consiste en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli (dont le succès est d'obtenir une boule verte) indépendantes et de même paramètre p.
- La v.a.r. N_V est le rang d'apparition du premier succès de l'expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi, } N_V \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$$

- Dans le cas de la v.a.r. N_B, le succès de chaque épreuve de Bernoulli est l'obtention d'une boule blanche. Il se produit avec probabilité $1 - p$.
- La v.a.r. N_B est le rang d'apparition du premier succès de l'expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi, } N_B \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p)}$$

□

b) Les variables aléatoires N_V et N_B sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

- La première boule verte ne peut apparaître au même rang que la première boule verte puisqu'on ne tire qu'une boule lors de chaque tirage. Ainsi :

$$[N_V = 1] \cap [N_B = 1] = \varnothing$$

On en déduit que : $\mathbb{P}([N_V = 1] \cap [N_B = 1]) = 0$.

- Or : $\mathbb{P}([N_V = 1]) = p(1-p)^0 = p \neq 0$ et $\mathbb{P}([N_B = 1]) = (1-p)(1-(1-p))^0 = 1 - p \neq 0$.

On en déduit que :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}([N_V = 1] \cap [N_B = 1]) & \neq & \mathbb{P}([N_V = 1]) \times \mathbb{P}([N_B = 1]) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & \neq & p(1-p) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } N_V \text{ et } N_B \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

□

On définit le couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ de la façon suivante.
Pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $[X = i] \cap [Y = j]$ est l'événement :

« les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i+j+1)^{\text{ème}}$ est blanche

ou

les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i+j+1)^{\text{ème}}$ est verte. »

Par exemple, pour la suite de tirages $BBBVVBVBB\cdots$ (où V est mis pour vert et B pour blanc), on a $X = 3$ et $Y = 2$.

2. a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

Démonstration.
Dans la suite du problème, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements :
- V_k : « on a obtenu une boule verte lors du $k^{\text{ème}}$ tirage »,
- B_k : « on a obtenu une boule blanche lors du $k^{\text{ème}}$ tirage ».

- Soit $i \in \mathbb{N}^*$.
  Notons Z (resp. T) la v.a.r. donnant le rang d'apparition de la première boule blanche (resp. verte) à l'issue des $i+1$ premiers tirages.
  Ainsi, $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :
$$\left\{\begin{array}{l} [Z = 1] = B_{i+2} \\ \forall j \geqslant 2,\ [Z = j] = V_{i+2} \cap \ldots \cap V_{i+j} \cap B_{i+j+1} \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l} [T = 1] = V_{i+2} \\ \forall j \geqslant 2,\ [T = j] = B_{i+2} \cap \ldots \cap B_{i+j} \cap V_{i+j+1} \end{array}\right.$$
- On remarque alors que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{array}{rcl} [X = i] \cap [Y = j] & = & (B_1 \cap \ldots \cap B_i \cap V_{i+1} \cap V_{i+2} \cap \ldots \cap V_{i+j} \cap B_{i+j+1}) \\ & \cup & (V_1 \cap \ldots \cap V_i \cap B_{i+1} \cap B_{i+2} \cap \ldots \cap B_{i+j} \cap V_{i+j+1}) \\ & = & ([N_V = i+1] \cap [Z = j]) \ \cup\ ([N_B = i+1] \cap [T = j]) \end{array}$$
- On en déduit que :

$[X = i]$

$= [X = i] \ \cap\ \Omega \ =\ [X = i] \ \cap\ \Big(\bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^*} [Y = j] \Big)$ *(car $([Y = j])_{j \in \mathbb{N}^*}$ est un sce)*

$= \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^*} \Big([X = i] \ \cap\ [Y = j] \Big)$ *(par distributivité de $\cap$ sur $\cup$)*

$= \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^*} \Big(([N_V = i+1] \cap [Z = j]) \ \cup\ ([N_B = i+1] \cap [T = j]) \Big)$ *(d'après le point précédent)*

$= \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^*} ([N_V = i+1] \cap [Z = j]) \ \cup\ \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^*} ([N_B = i+1] \cap [T = j])$

$= \Big([N_V = i+1] \cap \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^*} [Z = j] \Big) \ \cup\ \Big([N_B = i+1] \cap \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^*} [T = j] \Big)$ *(par distributivité de $\cap$ sur $\cup$)*

$= \Big([N_V = i+1] \cap \Omega \Big) \ \cup\ \Big([N_B = i+1] \cap \Omega \Big)$ *(car $([Z = j])_{j \in \mathbb{N}^*}$ et $([T = j])_{j \in \mathbb{N}^*}$ sont des sce)*

$= [N_V = i+1] \ \cup\ [N_B = i+1]$

- Finalement :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X=i]) & = & \mathbb{P}([N_V = i+1] \ \cup \ [N_B = i+1]) & \\
& = & \mathbb{P}([N_V = i+1]) \ + \ \mathbb{P}([N_B = i+1]) & \textit{(car } [N_V = i+1] \textit{ et } [N_B = i+1] \textit{ sont incompatibles)} \\
& = & p \ (1-p)^i \ + \ (1-p) \ p^i & \textit{(car } N_V \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \textit{ et } N_B \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p)\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } i \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([X=i]) = p \ (1-p)^i \ + \ (1-p) \ p^i.}$$

Remarque

- Nous avons mis en place une démonstration longue pour démontrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$:

$$[X = i] \ = \ [N_V = i+1] \ \cup \ [N_B = i+1]$$

A priori, l'esprit de l'énoncé était plutôt d'affirmer cette égalité d'événements. Pour avoir l'intuition de cette égalité, il suffit d'analyser que lorsque i est fixé et j varie de 1 à $+\infty$, les parties $B_1 \cap \ldots \cap B_i \cap V_{i+1}$ et $V_1 \cap \ldots \cap V_i \cap B_{i+1}$ sont fixes.

- Les v.a.r. Z et T ont été définies après avoir fixé l'entier $i \in \mathbb{N}^*$. En toute rigueur, on aurait dû noter $Z^{(i)}$ et $T^{(i)}$ ces variables aléatoire. On a fait ici le choix de ne pas alourdir les notations pour que la démonstration reste lisible. $\square$

b) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{p}{1-p} + \dfrac{1-p}{p}$.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance ssi la série $\sum\limits_{i \geqslant 1} i \ \mathbb{P}([X=i])$ est absolument convergente.

  Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- Notons $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcl}
\sum\limits_{i=1}^{N} i \ \mathbb{P}([X=i]) & = & \sum\limits_{i=1}^{N} i \ (p \ (1-p)^i \ + \ (1-p) \ p^i) \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{N} i \ p \ (1-p)^i \ + \ \sum\limits_{i=1}^{N} i \ (1-p) \ p^i \\
& = & p \sum\limits_{i=1}^{N} i \ (1-p)^i \ + \ (1-p) \ \sum\limits_{i=1}^{N} i \ p^i \\
& = & p \ (1-p) \ \sum\limits_{i=1}^{N} i \ (1-p)^{i-1} \ + \ p \ (1-p) \ \sum\limits_{i=1}^{N} i \ p^{i-1}
\end{array}$$

On reconnaît les sommes partielles de séries géométriques dérivées premières convergentes car de raison respective $(1-p) \in \,]-1,1[$ et $p \in \,]-1,1[$.

- Ainsi, la série $\sum\limits_{i \geqslant 1} i \, \mathbb{P}([X = i])$ est convergente.
  La v.a.r. X admet donc une espérance donnée par :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(X) & = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} i \, \mathbb{P}([X = i]) \\
& = & p \, (1-p) \sum\limits_{i=1}^{+\infty} i \, (1-p)^{i-1} \; + \; p \, (1-p) \sum\limits_{i=1}^{+\infty} i \, p^{i-1} \\
& = & p \, (1-p) \dfrac{1}{(1-(1-p))^2} \; + \; p \, (1-p) \dfrac{1}{(1-p)^2} \\
& = & \cancel{p} \, (1-p) \dfrac{1}{p^{\cancel{2}}} \; + \; p \, \cancel{(1-p)} \dfrac{1}{(1-p)^{\cancel{2}}} \\
& = & \dfrac{1-p}{p} + \dfrac{p}{1-p}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{1-p}{p} + \dfrac{p}{1-p}}$$

□

c) Montrer que $\mathbb{E}(X)$ est minimale lorsque $p = \dfrac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.

Démonstration.

- Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1-x}{x} + \dfrac{x}{1-x}$ sur $]0,1[$.
  La fonction f est dérivable sur $]0,1[$ comme somme des fonctions :
  × $x \mapsto \dfrac{1-x}{x}$ dérivable sur $]0,1[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $]0,1[$ (car polynomiales) et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,1[$.
  × $x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$ dérivable sur $]0,1[$ pour les mêmes raisons.
- Soit $x \in \,]0,1[$.

$$\begin{array}{rcl}
f'(x) & = & \dfrac{-x-(1-x)}{x^2} + \dfrac{(1-x) - x \, (-1)}{(1-x)^2} \\[2ex]
& = & \dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{-(1-x)^2 + x^2}{x^2 \, (1-x)^2} \\[2ex]
& = & \dfrac{-(1-2x+\cancel{x^2}) - \cancel{x^2}}{x^2 \, (1-x)^2} \\[2ex]
& = & \dfrac{2x-1}{x^2 \, (1-x)^2}
\end{array}$$

Comme $x^2 \, (1-x)^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $2x-1$. Enfin :

$$\begin{array}{rcl}
2x - 1 \leqslant 0 & \Leftrightarrow & 2x \leqslant 1 \\
& \Leftrightarrow & x \leqslant \dfrac{1}{2}
\end{array}$$

- On en déduit le tableau de variation de f :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
Variations de f	‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

Détaillons les différents éléments de ce tableau :

× $\dfrac{1-x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ et $\dfrac{x}{1-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

D'où : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

× $f(\frac{1}{2}) = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\ 2 = 2$.

× $\dfrac{1-x}{x} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{x}{1-x} \underset{x\to 1^-}{\sim} \dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$.

D'où : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

- La fonction f est décroissante sur $]0, \frac{1}{2}[$ puis croissante sur $[\frac{1}{2}, 1[$.
Elle admet donc un minimum en $x = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathbb{E}(X) = f(p) \text{ est minimale lorsque } p = \tfrac{1}{2}, \text{ de minimum } f(\tfrac{1}{2}) = 2.}$$

□

3. Montrer, pour tout (i,j) de $(\mathbb{N}^*)^2$:

$$\mathbb{P}\left([X=i]\cap[Y=j]\right) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

Démonstration.

- Soit $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$\begin{array}{rcl} [X=i]\cap[Y=j] & = & (B_1 \cap \ldots \cap B_i \cap V_{i+1} \cap \ldots \cap V_{i+j} \cap B_{i+j+1}) \\ & \cup & (V_1 \cap \ldots \cap V_i \cap B_{i+1} \cap \ldots \cap B_{i+j} \cap V_{i+j+1}) \\ & = & \left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} B_k\right) \cap \left(\bigcap\limits_{k=1}^{j} V_{i+k}\right) \cap B_{i+j+1} \\ & \cup & \left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} V_k\right) \cap \left(\bigcap\limits_{k=1}^{j} B_{i+k}\right) \cap V_{i+j+1} \end{array}$$

Ainsi, $[X=i]\cap[Y=j]$ est la réunion de deux événements incompatibles. En effet :

$$\begin{array}{rl} & \left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} B_k\right) \cap \left(\bigcap\limits_{k=1}^{j} V_{i+k}\right) \cap B_{i+j+1} \ \cap \ \left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} V_k\right) \cap \left(\bigcap\limits_{k=1}^{j} B_{i+k}\right) \cap V_{i+j+1} \\ = & \left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} B_k\right) \cap \left(\bigcap\limits_{k=1}^{j} V_{i+k}\right) \cap \left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} V_k\right) \cap \left(\bigcap\limits_{k=1}^{j} B_{i+k}\right) \cap \underbrace{\left(B_{i+j+1} \cap V_{i+j+1}\right)}_{\varnothing} = \varnothing \end{array}$$

- On en déduit que :

$$\begin{array}{rl}
& \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \\
= & \mathbb{P}\left(\left(\left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} B_k\right)\cap\left(\bigcap\limits_{k=1}^{j} V_{i+k}\right)\cap B_{i+j+1}\right)\ \cup\ \left(\left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} V_k\right)\cap\left(\bigcap\limits_{k=1}^{j} B_{i+k}\right)\cap V_{i+j+1}\right)\right) \\
= & \mathbb{P}\left(\left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} B_k\right)\cap\left(\bigcap\limits_{k=1}^{j} V_{i+k}\right)\cap B_{i+j+1}\right)\ +\ \mathbb{P}\left(\left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} V_k\right)\cap\left(\bigcap\limits_{k=1}^{j} B_{i+k}\right)\cap V_{i+j+1}\right) \quad \textit{(par additivité)} \\
= & \prod\limits_{k=1}^{i}\mathbb{P}(B_k)\times\left(\prod\limits_{k=1}^{i}\mathbb{P}(V_{i+k})\right)\times\mathbb{P}(B_{i+j+1})+\prod\limits_{k=1}^{i}\mathbb{P}(V_k)\times\left(\prod\limits_{k=1}^{i}\mathbb{P}(B_{i+k})\right)\times\mathbb{P}(V_{i+j+1}) \quad \textit{(par indépendance des lancers)} \\
= & \prod\limits_{k=1}^{i}(1-p)\times\left(\prod\limits_{k=1}^{i} p\right)\times(1-p)\ +\ \prod\limits_{k=1}^{i} p\times\left(\prod\limits_{k=1}^{i}(1-p)\right)\times p \\
= & (1-p)^i\times p^j\times(1-p)\ +\ p^i\times(1-p)^j\times p \\
= & (1-p)^{i+1}\times p^j\ +\ p^{i+1}\times(1-p)^j
\end{array}$$

$$\boxed{\forall (i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ \mathbb{P}\left([X=i]\cap[Y=j]\right)=p^{i+1}(1-p)^j+(1-p)^{i+1}p^j}$$

□

4. a) En déduire la loi de la variable aléatoire Y.

Démonstration.
Soit $j\in\mathbb{N}^*$.
La famille $([X=i])_{i\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Y=j]) & = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left([X=i]\cap[Y=j]\right) & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty}\left(p^{i+1}(1-p)^j+(1-p)^{i+1}p^j\right) & \\
& = & (1-p)^j\sum\limits_{i=1}^{+\infty}p^{i+1}+p^j\sum\limits_{i=1}^{+\infty}(1-p)^{i+1} & (*) \\
& = & p^2\ (1-p)^j\sum\limits_{i=1}^{+\infty}p^{i-1}+(1-p)^2\ p^j\sum\limits_{i=1}^{+\infty}(1-p)^{i-1} & \\
& = & p^2\ (1-p)^j\sum\limits_{i=0}^{+\infty}p^{i}+(1-p)^2\ p^j\sum\limits_{i=0}^{+\infty}(1-p)^{i} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & p^2\ (1-p)^j\ \dfrac{1}{1-p}+(1-p)^2\ p^j\ \dfrac{1}{1-(1-p)} & \\
& = & p^2\ (1-p)^{j-1}+(1-p)^2\ p^{j-1} &
\end{array}$$

(∗) ce passage est justifié par le fait que les séries $\sum\ p^i$ et $\sum\ (1-p)^i$ sont convergentes en tant que séries géométriques de raison respective $p\in\,]0,1[$ et $1-p\in\,]0,1[$.

$$\boxed{Y(\Omega)=\mathbb{N}^*\text{ et }\forall j\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Y=j])=p^2\ (1-p)^{j-1}+(1-p)^2\ p^{j-1}}$$

□

b) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance que l'on calculera.

Démonstration.

- La v.a.r. Y admet une espérance ssi la série $\sum\limits_{j \geqslant 1} j \ \mathbb{P}([Y=j])$ est absolument convergente.
  Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Notons $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} j \ \mathbb{P}([Y=j]) &= \sum_{j=1}^{N} \left(j \ p^2 \ (1-p)^{j-1} + j \ (1-p)^2 \ p^{j-1}\right) \\ &= p^2 \sum_{j=1}^{N} j \ (1-p)^{j-1} + (1-p)^2 \sum_{j=1}^{N} j \ p^{j-1}\end{aligned}$$

  On reconnaît les sommes partielles de séries géométriques dérivées premières convergentes car de raison respective $(1-p) \in \,]-1,1[$ et $p \in \,]-1,1[$.
- Ainsi, la série $\sum\limits_{j \geqslant 1} j \ \mathbb{P}([Y=j])$ est convergente.
  La v.a.r. Y admet donc une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{j=1}^{+\infty} j \ \mathbb{P}([Y=j]) \\ &= p^2 \sum_{j=1}^{+\infty} j \ (1-p)^{j-1} + (1-p)^2 \sum_{j=1}^{+\infty} j \ p^{j-1} \\ &= p^2 \ \frac{1}{(1-(1-p))^2} \ + \ (1-p)^2 \ \frac{1}{(1-p)^2} \\ &= 1+1 = 2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = 2}$$

□

5. a) Établir que, si $p \neq \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
(On pourra envisager $\mathbb{P}\left([X=1] \cap [Y=1]\right)$)

Démonstration.
Supposons que $p \neq \frac{1}{2}$.

- D'après la question ***3.*** :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=1] \cap [Y=1]) &= p^2 \ (1-p) + p \ (1-p)^2 \\ &= p \ (1-p) \ (\cancel{p} + (1-\cancel{p})) \\ &= p \ (1-p)\end{aligned}$$

- Par ailleurs d'après la question ***2.a)*** :

$$\mathbb{P}([X=1]) = p \ (1-p) + p \ (1-p) = 2 \ p \ (1-p)$$

  et d'après la question ***4.a)*** :

$$\mathbb{P}([Y=1]) = p^2 + (1-p)^2$$

- Raisonnons par équivalence.

$$\begin{array}{rcl} & & \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) \ = \ \mathbb{P}([X=1])\times\mathbb{P}([Y=1]) \\ \Leftrightarrow & & p\ (1-p) \ = \ 2\ p\ (1-p)\times(p^2+(1-p)^2) \\ \Leftrightarrow & & 1 \ = \ 2\ \dfrac{p\ (1-p)}{p\ (1-p)}\ (p^2+(1-p)^2) \qquad \textit{(car } p(1-p)\neq 0\textit{)} \\ \Leftrightarrow & & 2\ (p^2+(1-p)^2)-1=0 \\ \Leftrightarrow & & 2\ (2p^2-2p+1)-1=0 \\ \Leftrightarrow & & 4p^2-4p+1=0 \\ \Leftrightarrow & & (2p-1)^2=0 \\ \Leftrightarrow & & p=\dfrac{1}{2} \end{array}$$

Or comme $p\neq\dfrac{1}{2}$, la dernière égalité n'est pas vérifiée. Il en est de même de la première :

$$\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) \ \neq \ \mathbb{P}([X=1])\times\mathbb{P}([Y=1])$$

$$\boxed{\text{Si } p\neq\dfrac{1}{2},\ X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

□

b) Démontrer que, si $p=\dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Démonstration.
On suppose que $p=\dfrac{1}{2}$. Ainsi, $1-p=\dfrac{1}{2}$.
Soit $(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2$.

- D'après la question ***3.*** :

$$\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}+\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j} \ = \ 2\ \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j+1} \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j}$$

- Par ailleurs d'après la question ***2.a)*** :

$$\mathbb{P}([X=i]) \ = \ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{i} \ = \ 2\ \frac{1}{2}\ \left(\frac{1}{2}\right)^{i} \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^{i}$$

et d'après la question ***4.a)*** :

$$\mathbb{P}([Y=j]) \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \ = \ 2\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^{j}$$

- Finalement :

$$\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{j} \ = \ \mathbb{P}([X=i])\times\mathbb{P}([Y=j])$$

$$\boxed{\text{Si } p=\dfrac{1}{2},\ X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$$

□

Remarque
L'énoncé rate l'occasion de poser une question intéressante : « déterminer $\mathbb{E}(XY)$ dans ce cas ». On sait que X et Y sont indépendantes, et que ces deux v.a.r. admettent une espérance. On en déduit que XY admet une espérance donnée par :

$$\mathbb{E}(XY) \ = \ \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) \ = \ 2 \times 2 \ = \ 4$$

(d'après les questions ***2.c)*** et ***4.b)***)

II. Exercice 2 (EDHEC 2014)

On note I la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer que la matrice $A - \lambda\, I$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0$.

Démonstration.

- Déterminons le rang de la matrice $A - \lambda I$.

$$\begin{array}{cl}
 & \mathrm{rg}(A - \lambda I) \\
= & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 7-\lambda & 5 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 6 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 7-\lambda & 5 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 6\,L_3 - (7-\lambda)\,L_1}}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 30-(7-\lambda) & 6-(7-\lambda)(3-\lambda) \end{pmatrix}\right) \\
= & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 23+\lambda & -15+10\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\
\overset{L_3 \leftarrow (2+\lambda)\,L_3 + (23+\lambda)\,L_2}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 0 & (2+\lambda)\,(-15+10\lambda-\lambda^2)+(23+\lambda)\,(-1+\lambda) \end{pmatrix}\right) \quad \textit{(dans le cas où } 2+\lambda \neq 0\textit{)} \\
= & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 0 & -53+27\lambda+9\lambda^2-\lambda^3 \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

- Ainsi, dans le cas où $2 + \lambda \neq 0$, on obtient une réduite triangulaire supérieure.
Elle est non inversible ssi l'un de ses cœfficients diagonaux est nul. Ainsi, si $2 + \lambda \neq 0$:

$$A - \lambda I \text{ non inversible } \Leftrightarrow \ -53 + 27\lambda + 9\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

- Il reste à traiter le cas où $2+\lambda = 0$ ($i.e.$ $\lambda = -2$).
  Dans ce cas, en reprenant le début du calcul précédent, on obtient :

$$\begin{array}{cl} & \mathrm{rg}(A-\lambda I) \\ = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 23+\lambda & 6-(7-\lambda)(3-\lambda) \end{pmatrix}\right) \\ = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 21 & -39 \end{pmatrix}\right) \\ \overset{L_3 \leftrightarrow L2}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 0 & 21 & -39 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

  Ainsi, dans le cas où $2+\lambda = 0$, on obtient une réduite triangulaire supérieure dont les cœfficients diagonaux sont tous non nuls. La matrice $A - \lambda I$ est donc inversible dans ce cas.

$$\boxed{A - \lambda I \text{ non inversible ssi } -53 + 27\lambda + 9\lambda^2 - \lambda^3 = 0.}$$

Remarque

- Il était possible d'être plus astucieux lors du calcul du rang de la matrice $A - \lambda I$ afin de ne pas avoir à faire de disjonction de cas. On pouvait par exemple effectuer l'opération suivante :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(A-\lambda I) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 23+\lambda & -15+10\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 21 & -16+11\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 23+\lambda & -15+10\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

  On pouvait alors effectuer l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow 21L_3 - (23+\lambda)L_2 \right.$ pour conclure.
- Il était aussi possible à cette étape d'utiliser une opération sur les colonnes :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(A-\lambda I) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 23+\lambda & -15+10\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{C_2 \leftarrow C_2 + C_3}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 4-\lambda & 3-\lambda \\ 0 & -3 & -1+\lambda \\ 0 & 8+11\lambda-\lambda^2 & -15+10\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

  On pouvait alors effectuer l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow 3L_3 + (8+11\lambda-\lambda^2)L_2 \right.$ pour conclure.
- Cette question présentait une difficulté calculatoire relativement grande et assez inédite pour un sujet `EDHEC`. En contrepartie, le résultat attendu était fourni.
  Dans ce cas, la stratégie à adopter est la suivante :
  × écrire le calcul directement au propre.
  Il faut prendre le temps de le poser correctement et notamment de noter les opérations effectuées. Vous risquez de commettre des erreurs en opérant trop rapidement.
  × si le calcul n'aboutit pas rapidement, il ne faut pas s'acharner.
  Il suffit alors de signaler au correcteur que vous admettez ce résultat (vous pouvez brièvement expliquer ce que vous deviez obtenir et comment conclure dans ce cas).

  Passer la question n'étant pas pénalisant puisque le résultat était fourni. □

b) Étudier la fonction f qui, à tout réel x, associe $f(x) = x^3 - 9x^2 - 27x + 53$, puis dresser son tableau de variations.
(on précisera les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, on notera m le minimum local de f sur $\mathbb{R}$, M le maximum local de f sur $\mathbb{R}$ et on ne cherchera ni à calculer m, ni à calculer M)

Démonstration.

- La fonction f est polynomiale. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  $$f'(x) = 3x^2 - 18x - 27 = 3\ (x^2 - 6x - 9)$$
  Notons $P(X) = X^2 - 6X - 9$. Ce polynôme admet pour discriminant : $\Delta = 36 - (4 \times (-9)) = 72$.
  Notons que : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{72} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\ \sqrt{2}$. Le polynôme P admet pour racines :
  $$x_+ = \frac{6 + \sqrt{72}}{2} = 3 + 3\ \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad x_- = \frac{6 - \sqrt{72}}{2} = 3 - 3\ \sqrt{2}$$
  Ainsi : $f'(x) < 0 \ \Leftrightarrow\ x \in\ ]x_-, x_+[$.
- On en déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		x_-		x_+		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

Détaillons l'obtention des limites :

× $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^3 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

× $f(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} x^3 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$

Remarque

- Ici, $P(X) = aX^2 + bX + c = X^2 - 6X - 9$. Le cœfficient b s'écrit naturellement sous la forme $b = 2 \times b'$ avec $b' = 3$. Ainsi, lorsque l'on calcule le déterminant, on obtient :
  $$\begin{array}{rcl} \Delta & = & (2b')^2 - 4\ ac \\ & = & 4\ (b')^2 - 4\ ac \\ & = & 4\ ((b')^2 - ac) \ = \ 4\ \Delta' \end{array}$$
  Ainsi : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4\Delta'} = 2\ \sqrt{\Delta'}$.
  Ainsi, on en déduit que :
  $$x_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b' - 2\sqrt{\Delta'}}{2a} = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$
  $$x_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b' + 2\sqrt{\Delta'}}{2a} = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$$
- On retiendra que si b s'écrit naturellement sous la forme $2b'$, alors les formules classiques pour x_- et x_+ peuvent se simplifier. Le réel Δ' est appelé discriminant réduit du polynôme P. S'il n'est pas obligatoire de connaître les formules associées au discriminant réduit, la simplification évoquée ci-dessus doit `TOUJOURS` être effectuée et il faudra systématiquement y penser lorsque b s'écrit sous la forme $2b'$.

□

c) Calculer $f(0)$ et $f(3)$ puis déterminer les signes de m et M.

Démonstration.

- Tout d'abord :
  - $\times$ $f(0) = 53$.
  - $\times$ $f(3) = 3^3 - 9 \times 3^2 - 27 \times 3 + 53 = 27\ (1 - 3 - 3) + 53 = -135 + 53 = -82$.
- On remarque alors que :

$$\underset{x_-}{\underset{\shortparallel}{3\ (1 - \sqrt{2})}} \quad < \quad 0 \quad < \quad 3 \quad < \quad \underset{x_+}{\underset{\shortparallel}{3 + 3\ \sqrt{2}}}$$

- Or, sur $[x_-, x_+]$, la fonction f est strictement décroissante.
  On en déduit, par application de f :

$$f(x_-) > f(0) = 53 > 0 \quad \text{ et } \quad f(x_+) < f(3) = -82 < 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } M = f(x_-) > 0 \text{ et } m = f(x_+) < 0.}$$

□

d) Montrer que $A - \lambda\, I$ n'est pas inversible pour exactement trois valeurs de λ, que l'on ne cherchera pas à calculer et que l'on notera λ_1, λ_2 et λ_3, avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

Démonstration.

- La fonction f est :
  - $\times$ continue sur $]-\infty, x_-]$,
  - $\times$ strictement croissante sur $]-\infty, x_-]$.

  On en déduit que f réalise une bijection de $]-\infty, x_-]$ sur $f(]-\infty, x_-])$. Or :

$$f(]-\infty, x_-]) \ = \ ]\lim_{x \to -\infty} f(x), f(x_-)] \ = \ ]-\infty, M]$$

  Or $0 \in\ ]-\infty, M]$, car, d'après la question précédente, $M > 0$.
  Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\lambda_1 \in\ ]-\infty, x_-]$.
- En procédant de même, on démontre que :
  - $\times$ l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\lambda_2 \in\ ]x_-, x_+]$.
  - $\times$ l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\lambda_3 \in\ ]x_+, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Par construction } \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3.}$$

D'après la question ***1.a)***, la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible ssi $f(\lambda) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } A - \lambda I \text{ n'est pas inversible ssi } \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}.}$$

□

e) **Seulement pour les cubes (les autres pourront se servir de ce résultat sans démonstration)** En déduire qu'il existe une matrice P inversible telle que :

$A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la matrice A admet 3 valeurs propres distinctes λ_1, λ_2, λ_3. Comme $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice A est diagonalisable.
- Ainsi, il existe une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

La matrice D contient dans sa diagonale les valeurs propres de la matrice A.

$$\boxed{\text{Finalement, } A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.}$$

□

2. L'objectif de cette question est de déterminer l'ensemble E des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A c'est-à-dire qui vérifient $AM = MA$.

a) Montrer que les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales.

Démonstration.
Notons $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$.

- Tout d'abord :

$$DM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\, m_{11} & \lambda_1\, m_{12} & \lambda_1\, m_{13} \\ \lambda_2\, m_{21} & \lambda_2\, m_{22} & \lambda_2\, m_{23} \\ \lambda_3\, m_{31} & \lambda_3\, m_{32} & \lambda_3\, m_{33} \end{pmatrix}$$

- D'autre part :

$$MD = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\, m_{11} & \lambda_2\, m_{12} & \lambda_3\, m_{13} \\ \lambda_1\, m_{21} & \lambda_2\, m_{22} & \lambda_3\, m_{23} \\ \lambda_1\, m_{31} & \lambda_2\, m_{32} & \lambda_3\, m_{33} \end{pmatrix}$$

- Raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned}
& DM = MD \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} \lambda_1\, m_{11} & \lambda_1\, m_{12} & \lambda_1\, m_{13} \\ \lambda_2\, m_{21} & \lambda_2\, m_{22} & \lambda_2\, m_{23} \\ \lambda_3\, m_{31} & \lambda_3\, m_{32} & \lambda_3\, m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\, m_{11} & \lambda_2\, m_{12} & \lambda_3\, m_{13} \\ \lambda_1\, m_{21} & \lambda_2\, m_{22} & \lambda_3\, m_{23} \\ \lambda_1\, m_{31} & \lambda_2\, m_{32} & \lambda_3\, m_{33} \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1\, m_{12} = \lambda_2\, m_{12} \\ \lambda_1\, m_{13} = \lambda_3\, m_{13} \\ \lambda_2\, m_{23} = \lambda_3\, m_{23} \\ \lambda_2\, m_{21} = \lambda_1\, m_{21} \\ \lambda_3\, m_{31} = \lambda_1\, m_{31} \\ \lambda_3\, m_{32} = \lambda_2\, m_{32} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

- Traitons l'une de ces contraintes :

$$\lambda_1 \ m_{12} = \lambda_2 \ m_{12} \ \Leftrightarrow \ (\lambda_1 - \lambda_2) \ m_{12} = 0 \ \overset{\lambda_1 \neq \lambda_2}{\Leftrightarrow} \ m_{12} = 0$$

  On en déduit, en procédant de même, que : $m_{13} = m_{23} = m_{21} = m_{31} = m_{32} = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } M \text{ commute avec } D \text{ si seulement si } M \text{ est diagonale.}}$$

□

b) Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

(i) M est une matrice de E.

(ii) $P^{-1}MP$ commute avec D.

Démonstration.

$$\begin{array}{cll} & M \text{ est une matrice de } E & \\ \Leftrightarrow & M \text{ commute avec } A & \\ \Leftrightarrow & AM = MA & \\ \Leftrightarrow & PDP^{-1}M = MPDP^{-1} & \\ \Leftrightarrow & P^{-1}(PDP^{-1}M) = P^{-1}(MPDP^{-1}) & \textit{(en multipliant à gauche par } P^{-1}\textit{)} \\ \Leftrightarrow & DP^{-1}M = P^{-1}MPDP^{-1} & \\ \Leftrightarrow & (DP^{-1}M)P = (P^{-1}MPDP^{-1})P & \textit{(en multipliant à droite par } P^{-1}\textit{)} \\ \Leftrightarrow & D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } M \text{ est une matrice de } E \text{ si et seulement si } P^{-1}MP \text{ commute avec } D.}$$

□

c) Établir que toute matrice M de E est combinaison linéaire des trois matrices suivantes :

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, \qquad P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, \qquad P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Démonstration.

- D'après ce qui précède :

$$\begin{array}{cl} & M \text{ est une matrice de } E \\ \Leftrightarrow & P^{-1}MP \text{ commute avec } D \\ \Leftrightarrow & P^{-1}MP \text{ est diagonale} \\ \Leftrightarrow & \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \ P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \ M = P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} P^{-1} \end{array}$$

- Or :

$$P\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}P^{-1} = a \cdot P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + b \cdot P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + c \cdot P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

Ainsi, $M \in E$ si et seulement si M est combinaison linéaire des matrices

$$P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},\ P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},\ P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

□

d) En déduire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$E = \text{Vect}\left(P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \right)$$

- La famille $\mathcal{F} = \left(P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \right)$ est donc génératrice de E. Démontrons que c'est une famille libre.

  Soit $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que :

$$\mu_1 \cdot P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + \mu_2 \cdot P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + \mu_3 \cdot P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = 0$$

  Alors en multipliant à gauche par P^{-1}, on obtient :

$$\mu_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + \mu_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = 0$$

  Et en multipliant à droite par P, on obtient :

$$\mu_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Ce qui équivaut à : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$.

La famille $\mathcal{F}$ est libre.

La famille $\mathcal{F}$ est :

× génératrice de E,

× libre.

La famille $\mathcal{F}$ est donc une base de E.

On en déduit que $\dim(E) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 3$.

□

e) **Seulement pour les cubes :** Montrer, en raisonnant sur les valeurs propres de A, qu'il n'existe aucun polynôme annulateur non nul de A de degré inférieur ou égal à 2.
En déduire que $(I,\ A,\ A^2)$ est une base de E.

Démonstration.

- Soit R un polynôme annulateur non nul de A. Alors :

$$\mathrm{Sp}(A) \ \subset\ \{\text{racines du polynôme } R\}$$

  Ainsi, R admet au moins 3 racines : λ_1, λ_2, λ_3.

- On en déduit que R est multiple de $X - \lambda_1$, $X - \lambda_2$ et $X - \lambda_3$.
  Plus précisément, il existe un polynôme $T \neq 0$ tel que :

$$R(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)\ T(X)$$

$$\boxed{\text{Tout polynôme annulateur non nul de } A \text{ est de degré supérieur ou égal à 3.}}$$

- Remarquons maintenant que les matrices I, A et A^2 commutent toutes avec A.
  Ainsi, $\mathcal{F} = (I, A, A^2)$ est une famille d'éléments de E.

- Démontrons que $\mathcal{F}$ est une famille libre.

  Soit $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que :

$$\mu_1 \cdot I + \mu_2 \cdot A + \mu_3 \cdot A^2 = 0$$

  Ainsi, $R(X) = \mu_1 + \mu_2 X + \mu_3 X^2$ est un polynôme annulateur de A et est de degré inférieur ou égal à 2. D'après ce qui précède, ceci signifie que $R = 0$. D'où :

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$$

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F} \text{ est libre.}}$$

- La famille $\mathcal{F}$ est libre et est de cardinal 3 dans l'espace E de dimension $\dim(E) = 3$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{F} \text{ est une base de } E.}$$

□

III. Problème (HEC 2010)

Soit p un réel de $]0,1[$ et $q = 1-p$.
Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p (d'espérance $\frac{1}{p}$).
On pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.
On rappelle que $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

1. a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $\mathbb{V}(X_1)$ et de $\mathbb{P}([X_1 \leqslant k])$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.

Démonstration.
Rappelons tout d'abord que $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_1 = k]) = p\ q^{k-1}$.

$$\boxed{\mathbb{V}(X_1) = \frac{q}{p^2}}$$

$$\boxed{\text{Enfin, pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ \ \mathbb{P}([X_1 \leqslant k]) = 1 - q^k.}$$

Remarque

- Notons que la valeur de $\mathbb{P}([X_1 \leqslant k])$ (pour $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$) n'est pas un attendu du programme. Cependant, c'est une propriété très classique de la loi géométrique. Elle doit donc être connue et on se doit de savoir la redémontrer.
- Rappelons maintenant la démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  Notons que : $[X_1 \leqslant k] \ = \ \bigcup\limits_{i=1}^{k} [X_1 = i]$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_1 \leqslant k]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} [X_1 = i]\right) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}([X_1 = i]) & \textit{(les événements } [X_1 = i] \\ & & & \textit{étant incompatibles)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} p\ q^{i-1} & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\ & = & p \sum\limits_{i=0}^{k-1} q^i \ = \ p\ \dfrac{1-q^k}{1-q} & \textit{(car } q \neq 1\textit{)} \\ & = & 1 - q^k & \end{array}$$

□

b) Calculer $\mathbb{E}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{E}(X_1 - X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 - X_2)$.

Démonstration.

- Les v.a.r. $X_1 + X_2$ et $X_1 - X_2$ admettent une espérance (resp. une variance) car sont des combinaisons linéaires de v.a.r. qui admettent une espérance (resp. une variance).
- Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X_1 + X_2) & = & \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) \\ & = & \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p} \\ & = & \dfrac{2}{p} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X_1 - X_2) & = & \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_2) \\ & = & \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p} \\ & = & 0 \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \frac{2}{p} \ \text{ et } \ \mathbb{E}(X_1 - X_2) = 0}$$

- Les v.a.r. X_1 et X_2 sont indépendantes. Donc, par propriété de la variance :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_1 + X_2) &= \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) \\ &= \frac{q}{p^2} + \frac{q}{p^2} \\ &= 2\ \frac{q}{p^2} \end{aligned}$$

  D'après le lemme des coalitions, les v.a.r. X_1 et $-X_2$ sont indépendantes.
  Donc, par propriété de la variance :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_1 - X_2) &= \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(-X_2) \\ &= \mathbb{V}(X_1) + (-1)^2\ \mathbb{V}(X_2) \\ &= \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) \ = \ 2\ \frac{q}{p^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_1 + X_2) = 2\ \frac{q}{p^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_1 - X_2) = 2\ \frac{q}{p^2}.}$$

Remarque
Attention à l'erreur classique. Même si X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$\mathbb{V}(X_1 - X_2) \neq \mathbb{V}(X_1) - \mathbb{V}(X_2)$$

□

c) Établir la relation : $\mathbb{P}([X_1 = X_2]) = \dfrac{p}{1+q}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $[X_1 = X_2] = [X_1 - X_2 = 0]$.
- La famille $([X_2 = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_1 - X_2 = 0]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [X_1 - X_2 = 0]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [X_1 - k = 0]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [X_1 = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k])\ \mathbb{P}([X_1 = k]) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p\ q^{k-1}\ p\ q^{k-1} \\ &= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} \\ &= p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^{k} \ = \ p^2\ \frac{1}{1-q^2} && \textit{(car } q^2 \in\ ]0,1[\textit{)} \\ &= p^{\cancel{2}}\ \frac{1}{\cancel{(1-q)}(1+q)} \ = \ \frac{p}{1+q} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X_1 = X_2]) = \frac{p}{1+q}}$$

□

2. ***a)*** Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1-q^2$.
En déduire $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{V}(Z)$ et $\mathbb{E}(T)$.

Démonstration.

- Comme $Z = \min(X_1, X_2)$ et que $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Remarquons tout d'abord que :

$$[Z > k] \;=\; [\min(X_1, X_2) > k] \;=\; [X_1 > k] \cap [X_2 > k]$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z > k]) & = & \mathbb{P}([X_1 > k] \cap [X_2 > k]) & \\ & = & \mathbb{P}([X_1 > k]) \times \mathbb{P}([X_2 > k]) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & (1 - \mathbb{P}([X_1 \leqslant k]) \times (1 - \mathbb{P}([X_2 \leqslant k]) & \\ & = & (\cancel{1} - (\cancel{1} - q^k)) \times (\cancel{1} - (\cancel{1} - q^k)) & \textit{(d'après la question } \textbf{1.)} \\ & = & q^k \times q^k & \\ & = & \left(q^2\right)^k & \end{array}$$

Enfin, comme Z est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([Z > 0]) = \mathbb{P}([Z \in \mathbb{N}^*]) = 1$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Z > k]) = \left(q^2\right)^k}$$

- Tout d'abord :

$$[Z \geqslant k] = [Z > k] \cup [Z = k]$$

De plus, comme Z est à valeurs entières : $[Z \geqslant k] = [Z > k-1]$. Ainsi :

$$[Z > k-1] = [Z = k] \cup [Z > k]$$

Les événements $[Z = k]$ et $[Z > k]$ étant incompatibles :

$$\mathbb{P}([Z > k-1]) = \mathbb{P}([Z = k]) + \mathbb{P}([Z > k])$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([Z = k]) = \mathbb{P}([Z > k-1]) - \mathbb{P}([Z > k]).}$$

- En combinant ces résultats, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([Z = k]) & = & \mathbb{P}([Z > k-1]) - \mathbb{P}([Z > k]) \\ & = & \left(q^2\right)^{k-1} - \left(q^2\right)^k \\ & = & \left(q^2\right)^{k-1} (1 - q^2) \\ & = & \left(1 - (1 - q^2)\right)^{k-1} (1 - q^2) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - q^2\right).}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Ainsi } Z \text{ admet une espérance et une variance. De plus :} \\ \mathbb{E}(Z) = \dfrac{1}{1-q^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Z) = \dfrac{1-(1-q^2)}{(1-q^2)^2} = \dfrac{q^2}{(1-q^2)^2}. \end{array}}$$

- Enfin, comme $T + Z = \max(X_1, X_2) + \min(X_1, X_2) = X_1 + X_2$, alors :

$$T = X_1 + X_2 - Z$$

La v.a.r. T admet une espérance comme somme de v.a.r. qui admettent une espérance.
De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(T) & = & \mathbb{E}(X_1 + X_2 - Z) \\
& = & \mathbb{E}(X_1 + X_2) - \mathbb{E}(Z) \\
& = & \dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{1-q^2} \\
& = & \dfrac{2}{1-q} - \dfrac{1}{(1-q)(1+q)} \\
& = & \dfrac{2\ (1+q) - 1}{1-q^2} \ = \ \dfrac{1+2q}{1-q^2}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = \dfrac{1+2q}{1-q^2}}$$

□

b) Soit k un entier de $\mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité : $[Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k]$.

En déduire la relation suivante : $\mathbb{P}([T = k]) = 2\ \mathbb{P}([X_1 = k]) - \mathbb{P}([Z = k])$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rl}
& \omega \text{ réalise } [Z = k] \ \cup \ [T = k] \\
\Leftrightarrow & Z(\omega) = k \ \texttt{OU} \ T(\omega) = k \\
\Leftrightarrow & \max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \ \texttt{OU} \ \min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k
\end{array}$$

Procédons par disjonstion de cas :

× si $\max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = X_1(\omega)$:

Dans ce cas, $\min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = X_2(\omega)$ et :

$$\begin{array}{rl}
& \max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \ \texttt{OU} \ \min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \\
\Leftrightarrow & X_2(\omega) = k \ \texttt{OU} \ X_1(\omega) = k
\end{array}$$

× si $\max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = X_2(\omega)$:

Dans ce cas :

$$\begin{array}{rl}
& \max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \ \texttt{OU} \ \min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \\
\Leftrightarrow & X_1(\omega) = k \ \texttt{OU} \ X_2(\omega) = k
\end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rl}
& \omega \text{ réalise } [Z = k] \ \cup \ [T = k] \\
\Leftrightarrow & X_1(\omega) = k \ \texttt{OU} \ X_2(\omega) = k \\
\Leftrightarrow & \omega \text{ réalise } [X_1 = k] \ \cup \ [X_2 = k]
\end{array}$$

$$\boxed{[Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k]}$$

- Or :
$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}([Z=k]\cup[T=k]) & = & \mathbb{P}([Z=k])+\mathbb{P}([T=k])-\mathbb{P}([Z=k]\cap[T=k]) \\ & = & \mathbb{P}([Z=k])+\mathbb{P}([T=k])-\mathbb{P}([X_1=k]\cap[X_2=k])\end{array}$$
En effet, on peut démontrer en procédant comme en début de question que :
$$[Z=k]\cap[T=k] \ = \ [X_1=k]\cap[X_2=k]$$
- De même :
$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}([X_1=k]\cup[X_2=k]) & = & \mathbb{P}([X_1=k])+\mathbb{P}([X_2=k])-\mathbb{P}([X_1=k]\cap[X_2=k]) \\ & = & 2\ \mathbb{P}([X_1=k])-\mathbb{P}([X_1=k]\cap[X_2=k])\end{array}$$
En effet : $\mathbb{P}([X_1=k])=\mathbb{P}([X_2=k])$ car X_1 et X_2 suivent la même loi.
- D'après ce qui précède :
$$\mathbb{P}([Z=k]\ \cup\ [T=k]) \ = \ \mathbb{P}([X_1=k]\ \cup\ [X_2=k])$$
d'où $\mathbb{P}([Z=k])+\mathbb{P}([T=k])-\cancel{\mathbb{P}([X_1=k]\cap[X_2=k])} \ = \ 2\ \mathbb{P}([X_1=k])-\cancel{\mathbb{P}([X_1=k]\cap[X_2=k])}$

et $\mathbb{P}([T=k]) \ = \ 2\ \mathbb{P}([X_1=k])-\mathbb{P}([Z=k])$
$$\boxed{\mathbb{P}([T=k]) \ = \ 2\ \mathbb{P}([X_1=k])-\mathbb{P}([Z=k])}$$

Remarque
- Dans l'énoncé, il est demander de « justifier l'égalité » et non de la démontrer. Cette nuance signifie généralement que des points seront attribués même pour une explication avec les mains.
- Il est pratique pour conclure que de dire que les événements $[T=k]$ et $[Z=k]$ (resp. $[X_1=k]$ et $[X_2=k]$) sont incompatibles. Mais on ne peut en aucun cas affirmer une telle chose !
Il peut exister $\omega\in\Omega$ tel que $\max(X_1(\omega),X_2(\omega))=k$ et $\min(X_1(\omega),X_2(\omega))=k$.
Cela se produit pour tout $\omega\in\Omega$ tel que : $X_1(\omega)=X_2(\omega)=k$. □

c) Établir la formule : $\mathbb{V}(T)=\dfrac{q(2q^2+q+2)}{(1-q^2)^2}$.

Démonstration.
- Tout d'abord, comme $X_1(\Omega)=X_2(\Omega)=\mathbb{N}^*$ alors : $T(\Omega)=\big(\max(X_1,X_2)\big)(\Omega)\subset\mathbb{N}^*$.
- La v.a.r. T admet une variance ssi elle admet un moment d'ordre 2. Autrement dit, la v.a.r. T admet une variance ssi la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} k^2\ \mathbb{P}([T=k])$ est absolument convergente.
Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N\in\mathbb{N}^*$.
$$\begin{array}{rcl}\sum\limits_{k=1}^{N} k^2\ \mathbb{P}([T=k]) & = & \sum\limits_{k=1}^{N} k^2\ \big(2\ \mathbb{P}([X_1=k])-\mathbb{P}([Z=k])\big) \\ & = & 2\sum\limits_{k=1}^{N} k^2\ \mathbb{P}([X_1=k])-\sum\limits_{k=1}^{N} k^2\ \mathbb{P}([Z=k])\end{array}$$
Or X_1 et Z admettent un moment d'ordre 2 car admettent une variance.
De plus, comme $X_1(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $Z(\Omega)=\big(\min(X_1,X_2)\big)(\Omega)\subset\mathbb{N}^*$ alors :
$$\mathbb{E}(X_1^2)=\sum_{k=1}^{+\infty} k^2\ \mathbb{P}([X_1=k]) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(Z^2)=\sum_{k=1}^{+\infty} k^2\ \mathbb{P}([Z=k])$$

- On en déduit que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} k^2\ \mathbb{P}([T=k])$ est convergente et par passage à la limite dans l'égalité précédente :

$$\begin{array}{rcll}
\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k^2\ \mathbb{P}([T=k]) & = & 2 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k^2\ \mathbb{P}([X_1=k]) - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k^2\ \mathbb{P}([Z=k]) & \\
& = & 2\ \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(Z^2) & \\
& = & 2\ \big(\mathbb{V}(X_1) + (\mathbb{E}(X_1))^2\big) - \big(\mathbb{V}(Z) + (\mathbb{E}(Z))^2\big) & \textit{(par la formule de Kœnig-Huygens)} \\
& = & 2\ \left(\dfrac{q}{p^2} + \left(\dfrac{1}{p}\right)^2\right) - \left(\dfrac{q^2}{(1-q^2)^2} + \left(\dfrac{1}{1-q^2}\right)^2\right) & \textit{(d'après les questions précédentes)} \\
& = & 2\ \dfrac{q+1}{p^2} - \dfrac{q^2+1}{(1-q^2)^2} &
\end{array}$$

$$\boxed{T \text{ admet un moment d'ordre 2 et } \mathbb{E}(T^2) = 2\ \dfrac{q+1}{p^2} - \dfrac{q^2+1}{(1-q^2)^2}.}$$

- Par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{V}(T) & = & \mathbb{E}(T^2) - \big(\mathbb{E}(T)\big)^2 \\
& = & \left(2\ \dfrac{q+1}{p^2} - \dfrac{q^2+1}{(1-q^2)^2}\right) - \left(\dfrac{1+2q}{1-q^2}\right)^2 \\
& = & 2\ \dfrac{q+1}{p^2} - \dfrac{q^2+1}{(1-q^2)^2} - \dfrac{1+4q+4q^2}{(1-q^2)^2} \\
& = & 2\ \dfrac{q+1}{p^2} - \dfrac{2+4q+5q^2}{(1-q^2)^2} \\
& = & 2\ \dfrac{q+1}{(1-q)^2} - \dfrac{2+4q+5q^2}{\big((1-q)\ (1+q)\big)^2} \\
& = & 2\ \dfrac{(q+1)(1+q)^2}{(1-q)^2\ (1+q)^2} - \dfrac{2+4q+5q^2}{\big((1-q)\ (1+q)\big)^2} \\
& = & \dfrac{1}{(1-q)^2\ (1+q)^2} \big(2\ (1+q)^3 - (2+4q+5q^2)\big) \\
& = & \dfrac{1}{(1-q)^2\ (1+q)^2} \big(2\ (1+3q+3q^2+q^3) - (2+4q+5q^2)\big) \\
& = & \dfrac{1}{(1-q)^2\ (1+q)^2} \big(2q+q^2+2q^3\big) \ = \ \dfrac{q\ (2+q+2q^2)}{(1-q)^2\ (1+q)^2}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(T) = \dfrac{q\ (2+q+2q^2)}{(1-q)^2\ (1+q)^2}}$$

Remarque

- Il faut prendre le réflexe de connaître la formule de Kœnig-Huygens dans les deux sens.
  L'écriture :
  $$\mathbb{V}(X_1) \;=\; \mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2$$
  fournit l'égalité :
  $$\mathbb{E}(X_1^2) \;=\; \mathbb{V}(X_1) + (\mathbb{E}(X_1))^2$$
  qui est utilisée dans la démonstration.
- On pouvait aussi calculer $\mathbb{V}(T)$ en s'aidant de l'égalité :
  $$T + Z \;=\; X_1 + X_2$$
  Comme $T = X_1 + X_2 - Z$ alors T admet un moment d'ordre 2 comme somme de v.a.r. qui admettent un moment d'ordre 2. De la même manière, $T + Z$ admet un moment d'ordre 2.
  On a alors :
  $$\mathbb{V}(T+Z) \;=\; \mathbb{V}(X_1 + X_2) \;=\; \frac{2\ q}{p^2}$$
  D'autre part :
  $$\mathbb{V}(T+Z) \;=\; \mathbb{V}(T) + \mathbb{V}(Z) + 2\ \mathrm{Cov}(T, Z)$$
  On en déduit donc que :
  $$\begin{aligned} \mathbb{V}(T) \;&=\; \frac{2\ q}{p^2} - \mathbb{V}(Z) - 2\ \mathrm{Cov}(T,Z) \\ &=\; \frac{2\ q}{p^2} - \frac{q^2}{(1-q^2)^2} - 2\ \mathrm{Cov}(T,Z) \end{aligned}$$
  Par la formule de Kœnig-Huygens :
  $$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(T,Z) \;&=\; \mathbb{E}(TZ) - \mathbb{E}(T)\ \mathbb{E}(Z) \\ &=\; \mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(T)\ \mathbb{E}(Z) && \textit{(car } TZ = X_1X_2 \textit{ (*))} \\ &=\; \mathbb{E}(X_1)\ \mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(T)\ \mathbb{E}(Z) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ &=\; \frac{1}{p}\ \frac{1}{p} - \frac{1+2q}{1-q^2}\ \frac{1}{1-q^2} \\ &=\; \frac{1}{p^2} - \frac{1+2q}{(1-q^2)^2} \end{aligned}$$
  ((*) $TZ = \max(X_1,X_2)\ \min(X_1,X_2) = X_1\ X_2$*)*
  En combinant tous ces résultats, on obtient :
  $$\begin{aligned} \mathbb{V}(T) \;&=\; \frac{2\ q}{p^2} - \frac{q^2}{(1-q^2)^2} - 2\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1+2q}{(1-q^2)^2}\right) \\ &=\; \frac{2\ (q-1)}{p^2} + \frac{-q^2+4q+2}{(1-q^2)^2} \\ &=\; \frac{2\ (q-1)}{(1-q)^2} + \frac{-q^2+4q+2}{(1-q^2)^2} \\ &=\; \frac{1}{(1-q^2)^2}\left(2\ (q-1)(1+q)^2 - q^2 + 4q + 2\right) \\ &=\; \frac{1}{(1-q^2)^2}\ \left(2q + q^2 + 2q^3\right) \;=\; \frac{q\ (2+q+2q^2)}{(1-q^2)^2} \end{aligned}$$
  □

3. a) Préciser $(T - Z)(\Omega)$. Exprimer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'évènement $[Z = j] \cap [Z = T]$ en fonction des évènements $[X_1 = j]$ et $[X_2 = j]$.
En déduire pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $\mathbb{P}([Z = j] \cap [Z = T])$.

Démonstration.

- Rappelons que : $T - Z = |X_1 - X_2|$.
Tout d'abord, comme $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors :

$$\begin{array}{rcl} (X_1 - X_2)(\Omega) & = & \{X_1(\omega) - X_2(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ & \subset & \{i - j \mid (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2\} \ = \ \mathbb{Z} \end{array}$$

Ainsi, $(|X_1 - X_2|)(\Omega) \subset \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{N}$.

$$\boxed{(T - Z)(\Omega) \subset \mathbb{N}}$$

- Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcl} [Z = j] \ \cap \ [Z = T] & = & [\min(X_1, X_2) = j] \ \cap \ [\min(X_1, X_2) = \max(X_1, X_2)] \\ & = & [\min(X_1, X_2) = j] \ \cap \ [\max(X_1, X_2) = j] \\ & = & [X_1 = j] \ \cap \ [X_2 = j] \end{array}$$

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}^*, [Z = j] \ \cap \ [Z = T] = [X_1 = j] \ \cap \ [X_2 = j]}$$

- Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z = j] \ \cap \ [Z = T]) & = & \mathbb{P}([X_1 = j] \ \cap \ [X_2 = j]) & \\ & = & \mathbb{P}([X_1 = j]) \ \times \ \mathbb{P}([X_2 = j]) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & p \ q^{j-1} \times p \ q^{j-1} \ = \ p^2 \ q^{2j-2} & \end{array}$$

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([Z = j] \ \cap \ [Z = T]) = p^2 \ q^{2j-2}}$$

□

b) Montrer que pour tout couple (j, l) de $(\mathbb{N}^*)^2$, on a : $\mathbb{P}([Z = j] \cap [T - Z = l]) = 2p^2 q^{2j+l-2}$.

Démonstration.

- Soit $(j, l) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$\begin{array}{rcl} [Z = j] \ \cap \ [T - Z = l] & = & [Z = j] \ \cap \ [T - j = l] \\ & = & [Z = j] \ \cap \ [T = j + l] \\ & = & [\min(X_1, X_2) = j] \ \cap \ [\max(X_1, X_2) = j + l] \\ & = & \big([X_1 = j] \cap [X_2 = j + l]\big) \ \cup \ \big([X_1 = j + l] \cap [X_2 = j]\big) \end{array}$$

Il s'agit d'une réunion de deux événements incompatibles. En effet :

$$\begin{array}{rl} & \big([X_1 = j] \cap [X_2 = j + l]\big) \ \cap \ \big([X_1 = j + l] \cap [X_2 = j]\big) \\ = & \big([X_1 = j] \cap [X_1 = j + l]\big) \cap \big([X_2 = j] \cap [X_2 = j + l]\big) \\ = & \varnothing \ \cap \ \varnothing \ = \ \varnothing \end{array}$$

En effet : $[X_1 = j] \cap [X_1 = j + l] = \varnothing$ car $j + l > j$ puisque $l \geqslant 1 > 0$.

- Ainsi :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [T-Z=l]) \\
= \ & \mathbb{P}\big(\,[X_1=j] \cap [X_2=j+l]\,\big) \ + \ \mathbb{P}\big(\,[X_1=j+l] \cap [X_2=j]\,\big) \\
= \ & \mathbb{P}\big(\,[X_1=j]\,\big) \times \mathbb{P}([X_2=j+l]\,) \ + \ \mathbb{P}\big(\,[X_1=j+l]\,\big) \times \mathbb{P}\big(\,[X_2=j]\,\big) \quad \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépdendantes)} \\
= \ & p\ q^{j-1} \times p\ q^{j+l-1} \ + \ p\ q^{j+l-1} \times p\ q^{j-1} \\
= \ & p^2\ q^{2j+l-2} + p^2\ q^{2j+l-2} \ = \ 2\ p^2\ q^{2j+l-2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (j,l) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [T-Z=l]) = 2\ p^2\ q^{2j+l-2}}$$

□

c) Montrer que pour tout k de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) = \dfrac{pq^{|k|}}{1+q}$.
(on distinguera trois cas : $k=0$, $k>0$ et $k<0$)

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{Z}$. On procède par disjonction de cas.

- Si $k=0$:

$$\mathbb{P}([X_1-X_2=k]) = \mathbb{P}([X_1-X_2=0]) = \mathbb{P}([X_1=X_2]) = \frac{p}{1+q} = \frac{pq^0}{1+q}$$

- Si $k>0$:
La famille $([X_2=i])_{i\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_1-X_2=k]) \ &= \ \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2=i] \ \cap \ [X_1-X_2=k]) \\
&= \ \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2=i] \ \cap \ [X_1-i=k]) \\
&= \ \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2=i] \ \cap \ [X_1=i+k]) \\
&= \ \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2=i]) \ \times \ \mathbb{P}([X_1=i+k]) \qquad \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \ \sum_{i=1}^{+\infty} p\ q^{i-1} \ \times \ p\ q^{i+k-1} \\
&= \ p^2\ q^k \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2i-2} \ = \ p^2\ q^k \sum_{i=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{i-1} \\
&= \ p^2\ q^k \sum_{i=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^{i} \qquad \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \ p^2\ q^k\ \frac{1}{1-q^2} \ = \ p^{\cancel{2}}\ q^k\ \frac{1}{\cancel{(1-q)}\ (1+q)} \qquad \textit{(car } q^2 \in \,]-1,1[\textit{)} \\
&= \ \frac{p\ q^k}{1+q} \ = \ \frac{p\ q^{|k|}}{1+q}
\end{aligned}$$

- Si $k < 0$:

  On procède de la même manière que dans le point précédent. On obtient :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) & = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i]) \times \mathbb{P}([X_1 = i+k]) & \\
& = & \sum\limits_{\substack{i=1 \\ \text{tel que } i+k \in \mathbb{N}^*}}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i]) \times \mathbb{P}([X_1 = i+k]) & \\
& & + \sum\limits_{\substack{i=1 \\ \text{tel que } i+k \notin \mathbb{N}^*}}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i]) \times \cancel{\mathbb{P}([X_1 = i+k])} & \textit{(}[X_1 = i+k] = \varnothing \textit{ car } i+k \notin \mathbb{N}^*\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{i=-k+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i]) \times \mathbb{P}([X_1 = i+k]) & \left(\textit{car} \begin{array}{rl} & i+k \geqslant 1 \\ \Leftrightarrow & i \geqslant -k+1 \end{array}\right) \\
& = & \sum\limits_{i=-k+1}^{+\infty} p\ q^{i-1} \times p\ q^{i+k-1} & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} p\ q^{i-k-1} \times p\ q^{i-1} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & p^2\ q^{-k} \sum\limits_{i=1}^{+\infty} q^{2i-2} & \\
& = & \dfrac{p^2\ q^{-k}}{1+q} \ = \ \dfrac{p\ q^{|k|}}{1+q} & \textit{(en procédant comme au point précédent)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) = \frac{p\ q^{|k|}}{1+q}}$$

□

d) En déduire la loi de la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$.

Démonstration.

- Rappelons que : $T - Z = |X_1 - X_2|$.

$$\boxed{(|X_1 - X_2|)(\Omega) \subset \mathbb{N}}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Remarquons tout d'abord que :

$$[\ |X_1 - X_2| = k] \ = \ [X_1 - X_2 = k] \ \cup \ [X_1 - X_2 = -k]$$

  Deux cas se présentent :

  × si $k \neq 0$: alors les événements $[X_1 - X_2 = k]$ et $[X_1 - X_2 = -k]$ sont incompatibles. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([\ |X_1 - X_2| = k]) & = & \mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) + \mathbb{P}([X_1 - X_2 = -k]) & \\
& = & \dfrac{p\ q^k}{1+q} + \dfrac{p\ q^k}{1+q} \ = \ 2\ \dfrac{p\ q^k}{1+q} & \textit{(car } |k| = k\textit{)}
\end{array}$$

  × si $k = 0$:

$$\mathbb{P}([\ |X_1 - X_2| = 0]) \ = \ \mathbb{P}([X_1 - X_2 = 0]) \ = \ \frac{p}{1+q}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([\ |X_1 - X_2| = k]) = 2\ \frac{p\ q^k}{1+q} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([\ |X_1 - X_2| = 0]) = \frac{p}{1+q}}$$

□

e) Établir à l'aide des questions précédentes que les variables Z et $T-Z$ sont indépendantes.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer :

$$\forall j \in Z(\Omega),\ \forall l \in (T-Z)(\Omega),\ \mathbb{P}([Z=j] \cap [T-Z=l]) \ = \ \mathbb{P}([Z=j]) \times \mathbb{P}([T-Z=l])$$

avec $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et $(T-Z)(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

- Soit $(j,l) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{P}([Z=j]) \times \mathbb{P}([T-Z=l]) & \\ = & \left(q^2\right)^{j-1} (1-q^2) \times 2\ \dfrac{p\ q^l}{1+q} & \textit{(d'après les questions précédentes)} \\ = & q^{2j-2}\ (1-q)\ \cancel{(1+q)} \times 2\ \dfrac{p\ q^l}{\cancel{1+q}} & \\ = & q^{2j-2}\ p \times 2p\ q^l \ = \ 2\ p^2\ q^{2j+l-2} & \\ = & \mathbb{P}([Z=j]\ \cap\ [T-Z=l]) & \textit{(d'après la \textbf{3.c)})} \end{array}$$

- Il reste à étudier le cas où $j \in \mathbb{N}^*$ et $l=0$.

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{P}([Z=j]) \times \mathbb{P}([T-Z=0]) & \\ = & \left(q^2\right)^{j-1} (1-q^2) \times \dfrac{p}{1+q} & \textit{(d'après les questions précédentes)} \\ = & q^{2j-2}\ (1-q)\ \cancel{(1+q)} \times \ \dfrac{p}{\cancel{1+q}} & \\ = & q^{2j-2}\ p \times p \ = \ p^2\ q^{2j-2} & \\ = & \mathbb{P}([Z=j]\ \cap\ [T-Z=l]) & \textit{(d'après la \textbf{3.a)})} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Les variables } Z \text{ et } T-Z \text{ sont indépendantes.}}$$

□

4. a) À l'aide du résultat de la question ***3.e)***, calculer $\mathrm{Cov}(Z,T)$.
Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

- D'après la question ***3.e)***, les variables Z et $T-Z$ sont indépendantes. On en déduit que :

$$\mathrm{Cov}(Z, T-Z) = 0$$

Or, par linéarité gauche de l'opérateur Cov :

$$\underbrace{\mathrm{Cov}(Z,T-Z)}_{0} \ = \ \mathrm{Cov}(Z,T) \ - \ \underbrace{\mathrm{Cov}(Z,Z)}_{\mathbb{V}(Z)}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Cov}(Z,T) \ = \ \mathbb{V}(Z) \ = \ \dfrac{q^2}{(1-q^2)^2}}$$

- Comme $q \neq 0$, $\mathrm{Cov}(Z,T) \neq 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, les v.a.r. } Z \text{ et } T \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

□

b) Calculer en fonction de q, le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T.

Démonstration.
Par définition :

$$\begin{array}{rcl} \rho(Z,T) & = & \dfrac{\mathrm{Cov}(Z,T)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}\ \sqrt{\mathbb{V}(T)}} \\ & = & \dfrac{\mathbb{V}(Z)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}\ \sqrt{\mathbb{V}(T)}} \ = \ \dfrac{\cancel{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}}\ \sqrt{\mathbb{V}(Z)}}{\cancel{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}}\ \sqrt{\mathbb{V}(T)}} \\ & = & \sqrt{\dfrac{\frac{q^2}{(1-q^2)^2}}{\frac{q\ (2+q+2q^2)}{(1-q^2)^2}}} \ = \ \sqrt{\dfrac{q^2}{\cancel{(1-q^2)^2}}\ \dfrac{\cancel{(1-q^2)^2}}{q\ (2+q+2q^2)}} \\ & = & \sqrt{\dfrac{q}{2+q+2q^2}} \end{array}$$

$$\boxed{\rho(Z,T) = \sqrt{\dfrac{q}{2+q+2q^2}}}$$

□

c) Déterminer la loi de probabilité du couple (Z,T).

Démonstration.

- On rappelle que $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On procède par disjonction de cas :
  × si $i < j$: alors $[Z=j] \ \cap \ [T=i] = \varnothing$.
  En effet, $Z = \min(X_1,X_2) \ \leqslant \ \max(X_1,X_2) = T$.

$$\boxed{\text{Si } i<j, \ \mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [T=i]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0}$$

  × si $i = j$: alors $[Z=j] \ \cap \ [T=j] = [X_1=j] \ \cap \ [X_2=j]$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [T=j]) & = & \mathbb{P}([X_1=j] \ \cap \ [X_2=j]) & \\ & = & \mathbb{P}([X_1=j]) \times \mathbb{P}([X_2=j]) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & p\ q^{j-1} \times p\ q^{j-1} \ = \ p^2\ q^{2j-2} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [T=j]) \ = \ p^2\ q^{2j-2}}$$

  × si $i > j$: alors $[Z=j] \ \cap \ [T=i] = ([X_1=j] \cap [X_2=i]) \ \cup \ ([X_1=i] \cap [X_2=j])$.

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [T=i]) & \\ = & \mathbb{P}\big(\ ([X_1=j] \cap [X_2=i]) \ \cup \ ([X_1=i] \cap [X_2=j]) \ \big) & \\ = & \mathbb{P}([X_1=j] \cap [X_2=i]) \ + \ \mathbb{P}([X_1=i] \cap [X_2=j]) & \textit{(car } [X_1=j] \cap [X_2=i] \textit{ et } [X_1=i] \cap [X_2=j] \textit{ sont incompatibles)} \\ = & \mathbb{P}([X_1=j]) \times \mathbb{P}([X_2=i]) + \mathbb{P}([X_1=i]) \times \mathbb{P}([X_2=j]) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ = & p\ q^{j-1} \times p\ q^{i-1} + p\ q^{i-1} \times p\ q^{j-1} \ = \ 2\ p^2\ q^{i+j-2} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Si } i>j, \ \mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [T=i]) \ = \ 2\ p^2\ q^{i+j-2}.}$$

□

d) Déterminer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, la loi de probabilité conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

- Rappelons que $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) \; = \; \frac{\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i])}{\mathbb{P}([Z = j])} \; = \; \frac{\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i])}{\left(q^2\right)^{j-1} \, (1 - q^2)}$$

La loi du couple (Z, T) étant donnée par cas, on procède par disjonction de cas :

× si $i < j$: alors $\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

$$\boxed{\text{Si } i < j, \; \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) = 0.}$$

× si $i = j$: alors $\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = j]) = p^2 \, q^{2j-2}$.

$$\mathbb{P}_{[Z=j]}([T = j]) \; = \; \frac{\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = j])}{\left(q^2\right)^{j-1} \, (1 - q^2)} \; = \; \frac{p^2 \, \cancel{q^{2j-2}}}{\cancel{\left(q^2\right)^{j-1}} \, (1 - q^2)} \; = \; \frac{p^{\cancel{2}}}{\cancel{(1 - q)} \, (1 + q)} \; = \; \frac{p}{1 + q}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{[Z=j]}([T = j]) \; = \; \frac{p}{1 + q}}$$

× si $i > j$: alors $\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i]) = 2 \, p^2 q^{i+j-2}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) &= \frac{\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = j])}{\left(q^2\right)^{j-1} \, (1 - q^2)} \\ &= \frac{2 \, p^2 \, q^{i+j-2}}{\left(q^2\right)^{j-1} \, (1 - q^2)} \\ &= \frac{2 \, p^2 \cancel{q^{j-2}} \, q^i}{q^j \, \cancel{q^{j-2}} \, (1 - q^2)} \\ &= \frac{2 \, p^{\cancel{2}} \, q^i}{q^j \, \cancel{(1 - q)} \, (1 + q)} \\ &= \frac{2 \, p \, q^i}{q^j (1 + q)} = \frac{2 \, p \, q^{i-j}}{1 + q} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } i > j, \; \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) \; = \; \frac{2 \, p \, q^{i-j}}{1 + q}.}$$

□

e) Soit j un élément de $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeur dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.
Calculer $\mathbb{E}(D_j)$.

Démonstration.

- La v.a.r. D_j admet une espérance ssi la série $\sum\limits_{i \geqslant 1} i \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i])$ est absolument convergente.
  Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{cl} & \sum\limits_{i=1}^{N} i \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T=i]) \\ = & \sum\limits_{i=1}^{j-1} i \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T=i]) \ + \ \sum\limits_{i=j}^{j} i \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T=i]) \ + \ \sum\limits_{i=j+1}^{N} i \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T=i]) \quad \textit{(par relation de Chasles en supposant } N > j\textit{)} \\ = & 0 \ + \ \dfrac{p}{1+q} \ + \ \sum\limits_{i=j+1}^{N} i \ \dfrac{2 \ p \ q^{i-j}}{1+q} \quad \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

- Étudions en particulier la somme de droite :

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{i=j+1}^{N} i \ \dfrac{2 \ p \ q^{i-j}}{1+q} & = & \dfrac{2 \ p}{1+q} \sum\limits_{i=j+1}^{N} i \ q^{i-j} \\ & = & \dfrac{2 \ p}{1+q} \sum\limits_{i=1}^{N-j} i \ q^{(i+j)-j} \quad \textit{(par décalage d'indice)} \\ & = & \dfrac{2 \ p}{1+q} \sum\limits_{i=1}^{N-j} i \ q^{i} \\ & = & \dfrac{2 \ p \ q}{1+q} \sum\limits_{i=1}^{N-j} i \ q^{i-1} \end{array}$$

  On reconnaît la somme partielle (d'ordre $N - j$) d'une série géométrique dérivée première convergente car de raison $q \in \,]-1, 1[$.
- Ainsi, la série $\sum\limits_{i \geqslant 1} i \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i])$ est convergente et par passage à la limite dans l'égalité précédente on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{i=1}^{+\infty} i \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T=i]) & = & \dfrac{p}{1+q} + \dfrac{2 \ p \ q}{1+q} \sum\limits_{i=1}^{+\infty} i \ q^{i-1} \\ & = & \dfrac{p}{1+q} + \dfrac{2 \ \cancel{p} \ q}{1+q} \ \dfrac{1}{(1-q)^{\cancel{2}}} \\ & = & \dfrac{1}{(1+q)(1-q)} \left(p \ (1-q) + 2 \ q\right) \\ & = & \dfrac{1}{1-q^2} \left((1-q)^2 + 2 \ q\right) \ = \ \dfrac{1+q^2}{1-q^2} \end{array}$$

$$\boxed{\text{La variable } D_j \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(D_j) = \dfrac{1+q^2}{1-q^2}}$$

Remarque

- Dans cette question, on détermine $\sum_{i=1}^{+\infty} i \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i])$.
  Cette écriture est très proche de l'écriture de $\mathbb{E}(T)$: on a simplement remplacé ici l'application probabilité $\mathbb{P}$ par l'application probabilité $\mathbb{P}_{[Z=j]}$.
  Autrement dit, on détermine l'espérance de T sachant que l'événement $[Z = j]$ est réalisé.
- Cet objet est relativement classique en mathématiques (au programme de la ECS). Il s'agit de l'espérance conditionnelle de la variable T relativement à l'événement $[Z = j]$. Elle se note :

$$\mathbb{E}(T \mid [Z = j])$$

  (cette notation n'est pas très heureuse au vu de la notation utilisée pour noter les probabilités conditionnelles)
- On peut noter que ces calculs d'espérances conditionnelles permettent de déterminer l'espérance. Sous réserve d'existence des objets considérés :

$$\mathbb{E}(T) \ = \ \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Z = j]) \ \mathbb{E}(T \mid [Z = j])$$

  Il faut considérer cette égalité comme une formule des probabilités totales (qui est à la base de ce résultat) adaptée à la notion d'espérance.

□